AULA DEZ: Análise Combinatória (Parte I)

Olá, amigos!

Hoje iniciamos um assunto novo: Análise Combinatória! É este também um dos mais freqüentes nas provas de Raciocínio Lógico, quer elaboradas pela Esaf, quer por outra qualquer mesa elaboradora!

Antes de mais nada, porém, passemos à correção do dever de casa da aula passada.

DEVER DE CASA

01. (AFC/CGU 2003/2004 ESAF) Três homens são levados à presença de um jovem lógico. Sabe-se que um deles é um honesto marceneiro, que sempre diz a verdade. Sabe-se, também, que um outro é um pedreiro, igualmente honesto e trabalhador, mas que tem o estranho costume de sempre mentir, de jamais dizer a verdade. Sabe-se, ainda, que o restante é um vulgar ladrão que ora mente, ora diz a verdade. O problema é que não se sabe quem, entre eles, é quem. À frente do jovem lógico, esses três homens fazem, ordenadamente, as seguintes declarações:

O primeiro diz: "Eu sou o ladrão."
O segundo diz: "É verdade; ele, o que acabou de falar, é o ladrão."
O terceiro diz: "Eu sou o ladrão."

Com base nestas informações, o jovem lógico pode, então, concluir corretamente que:

a) O ladrão é o primeiro e o marceneiro é o terceiro.
b) O ladrão é o primeiro e o marceneiro é o segundo.
c) O pedreiro é o primeiro e o ladrão é o segundo.
d) O pedreiro é o primeiro e o ladrão é o terceiro.
e) O marceneiro é o primeiro e o ladrão é o segundo.

Sol.:

- Temos as seguintes informações sobre os três homens:
1) O marceneiro sempre diz a **verdade**;
2) O pedreiro sempre **mente**;
3) O ladrão ora **mente**, ora diz a **verdade**.

- Os três homens fazem as seguintes declarações:
1) O primeiro homem diz: "Eu sou o ladrão."
2) O segundo homem diz: "É verdade; ele, o que acabou de falar, é o ladrão."
3) O terceiro homem diz: "Eu sou o ladrão."

Pela questão, não se sabe quem, entre eles, é quem! Faremos algumas suposições para identificar os homens que fizeram as declarações! Vamos supor a um dos declarantes que ele diz a verdade (ou seja, é o marceneiro), e depois testaremos esta suposição! Assim, devemos realizar três testes, conforme mostramos abaixo:

1º teste: Supor que o **primeiro homem** que declara é o **marceneiro**;
2º teste: Supor que o **segundo homem** que declara é o **marceneiro**;
3º teste: Supor que o **terceiro homem** que declara é o **marceneiro**.

Realizando os testes:

→ **1º teste:** Supor que o **primeiro homem** que declara é o **marceneiro**:

O primeiro homem declara: "Eu sou o ladrão"! Portanto, este homem não pode ser o marceneiro, pois o marceneiro sempre diz a verdade, e assim nunca se declararia que é ladrão! Concluímos que **o primeiro homem não é o marceneiro**!

Veja que tanto o primeiro homem quanto o terceiro homem declaram a mesma coisa! Daí, o **3º teste** terá um resultado similar ao obtido pelo 1º teste: **o marceneiro não pode ser o terceiro homem**!

Então, com certeza, o **2º teste** terá um resultado positivo, pois foi o único que restou! Donde concluímos que **o segundo homem é o marceneiro**!

E como o marceneiro é o segundo homem, então é verdadeira a sua declaração! Daí, obtemos que **o primeiro homem diz a verdade**!

Como o **primeiro homem** diz a verdade, então **ele é o ladrão** (não pode ser o pedreiro, pois este sempre mente!). Resta que **o terceiro homem é o pedreiro**, que sempre mente!

Resposta: alternativa **B**.

02.(MPOG 2002) Cinco amigas, Ana, Bia, Cati, Dida e Elisa, são tias ou irmãs de Zilda. As tias de Zilda sempre contam a verdade e as irmãs de Zilda sempre mentem. Ana diz que Bia é tia de Zilda. Bia diz que Cati é irmã de Zilda. Cati diz que Dida é irmã de Zilda. Dida diz que Bia e Elisa têm diferentes graus de parentesco com Zilda, isto é: se uma é tia a outra é irmã. Elisa diz que Ana é tia de Zilda. Assim, o número de irmãs de Zilda neste conjunto de cinco amigas é dado por:

a) 1 d) 4
b) 2 e) 5
c) 3

Sol.:

O enunciado traz as seguintes informações:

- Há cinco amigas: **Ana**, **Bia**, **Cati**, **Dida** e **Elisa**, que são **tias** ou **irmãs** de **Zilda**.
- As **tias** de Zilda sempre **contam a verdade** e as **irmãs** de Zilda **sempre mentem**.

Também, temos as seguintes declarações feitas pelas cinco amigas:

1) Ana diz: Bia é tia de Zilda
2) Bia diz: Cati é irmã de Zilda
3) Cati diz: Dida é irmã de Zilda
4) Dida diz: Bia e Elisa têm diferentes graus de parentesco com Zilda
5) Elisa diz: Ana é tia de Zilda

Vamos supor que a primeira declarante seja tia de Zilda, ou seja, estamos supondo que **Ana é tia de Zilda**, e como as tias sempre dizem a verdade, então **Ana sempre diz a verdade**! Agora, testaremos esta suposição:

Ana diz: Bia é tia de Zilda.	→ Como Ana diz a verdade, então Bia é tia de Zilda! Logo, **Bia diz a verdade**!
Bia diz: Cati é irmã de Zilda	→ Também Bia diz a verdade, então Cati é irmã de Zilda! Logo, **Cati mente**!
Cati diz: Dida é irmã de Zilda	→ Temos que Cati mente, então Dida não é irmã de Zilda, mas sim tia de Zilda! Logo, **Dida diz a verdade**!
Dida diz: Bia e Elisa têm diferentes graus de parentesco com Zilda.	→ Como Dida diz a verdade, e como obtemos anteriormente que Bia é tia de Zilda, então concluímos que Elisa é irmã de Zilda! Logo, **Elisa mente**!
Elisa diz: Ana é tia de Zilda	→ Elisa mente, logo **Ana não é tia de Zilda**! Porém, isto contradiz a suposição inicial que fizemos: **Ana é tia de Zilda**! Assim, como ocorreu uma contradição, então a suposição inicial está errada, restando-nos considerar que, com certeza, **Ana é irmã de Zilda**!

Sabendo que **Ana é irmã de Zilda**, faremos uma nova análise nas declarações de cada amiga, para identificarmos cada uma delas quanto ao parentesco com Zilda.

Ana diz: Bia é tia de Zilda.	→ Como **Ana é irmã de Zilda**, logo **Ana mente**, daí Bia não é tia de Zilda, mas sim irmã! Logo, **Bia mente**!
Bia diz: Cati é irmã de Zilda	→ Como Bia mente, então Cati não é irmã de Zilda, mas sim tia! Logo, **Cati diz a verdade**!
Cati diz: Dida é irmã de Zilda	→ Temos que Cati diz a verdade, então Dida é irmã de Zilda! Logo, **Dida mente**!
Dida diz: Bia e Elisa têm diferentes graus de parentesco com Zilda.	→ Como Dida mente, então Bia e Elisa têm iguais graus de parentesco com Zilda, como obtemos anteriormente que Bia é irmã de Zilda, então concluímos que Elisa também é irmã de Zilda! Logo, **Elisa mente**!
Elisa diz: Ana é tia de Zilda	→ Elisa mente, então **Ana não é tia de Zilda**! Este resultado está de acordo com o que estabelecemos inicialmente!

- Resultados obtidos:

Ana é irmã de Zilda!
Bia é irmã de Zilda!
Cati é tia de Zilda!
Dida é irmã de Zilda!
Elisa é irmã de Zilda!

Resposta: alternativa **D**.

03.(Analista MPU/ESAF) Fernanda atrasou-se e chega ao estádio da Ulbra quando o jogo de vôlei já está em andamento. Ela pergunta às suas amigas, que estão assistindo à partida, desde o início, qual o resultado até o momento. Suas amigas dizem-lhe:

Amanda: "Neste set, o escore está 13 a 12".
Berenice: "O escore não está 13 a 12, e a Ulbra já ganhou o primeiro set".
Camila: "Este set está 13 a 12, a favor da Ulbra".
Denise: "O escore não está 13 a 12, a Ulbra está perdendo este set, e quem vai sacar é a equipe visitante".
Eunice: "Quem vai sacar é a equipe visitante, e a Ulbra está ganhando este set".

Conhecendo suas amigas, Fernanda sabe que duas delas estão mentindo e que as demais estão dizendo a verdade. Conclui, então, corretamente, que

a) o escore está 13 a 12, e a Ulbra está perdendo este set, e quem vai sacar é a equipe visitante.
b) o escore está 13 a 12, e a Ulbra está vencendo este set, e quem vai sacar é a equipe visitante.
c) o escore não está 13 a 12, e a Ulbra está vencendo este set, e quem vai sacar é a equipe visitante.
d) o escore não está 13 a 12, e a Ulbra não está vencendo este set, e a Ulbra venceu o primeiro set.
e) o escore está 13 a 12, e a Ulbra vai sacar, e a Ulbra venceu o primeiro set.

Sol.:

Entre as cinco amigas de **Fernanda**: **Amanda**, **Berenice**, **Camila**, **Denise** e **Eunice**, **duas delas estão mentindo** e as **outras três dizem a verdade**.

Para descobrirmos quem mente e quem diz a verdade, temos que escolher uma das amigas de Fernanda e supor que ela está falando a verdade! Escolheremos Denise, pois a sua declaração contém várias informações.

→ Teste da suposição: "**Denise diz a verdade**".

Considerando que Denise diz a verdade, obtemos da sua declaração:
- **É verdade que**: o escore não está 13 a 12.
- **É verdade que**: a Ulbra está perdendo este set.
- **É verdade que**: quem vai sacar é a equipe visitante.

A partir destes resultados, analisaremos as declarações das quatro outras amigas para identificar quem mente e quem diz a verdade.

Amanda: "Neste set, o escore está 13 a 12".	→ Amanda **mente**!
Berenice: "O escore não está 13 a 12, e a Ulbra já ganhou o primeiro set".	→ Nada podemos afirmar sobre Berenice!
Camila: "Este set está 13 a 12, a favor da Ulbra".	→ Camila **mente**!
Eunice: "Quem vai sacar é a equipe visitante, e a Ulbra está ganhando este set".	→ Eunice **mente**!

Da análise acima, temos que três amigas mentem! Entretanto, isso contradiz o enunciado da questão que afirma que só há duas mentindo! Portanto, a suposição inicial que Denise diz a verdade está errada! Logo, **Denise mente**!

Ainda falta identificar sobre a verdade das declarações das outras quatro amigas: Amanda, Berenice, Camila e Eunice. Sabemos, agora, que entre estas somente uma mente! A partir disso, adotaremos o seguinte procedimento que já adotado na aula passada: observaremos, entre as declarações destas quatro amigas, duas que não podem ser ambas verdadeiras!

Rapidamente, obtemos que **Amanda** e **Berenice** não podem, ambas, estarem dizendo a verdade! Pois uma diz que o escore está 13 a 12, e a outra diz que não está 13 a 12! Portanto, uma mente e a outra diz a verdade!

Observe que a declaração de **Berenice** também entra em choque com a declaração de **Camila**! Portanto, uma mente e outra diz a verdade!

Com estes dois resultados, concluímos que **Berenice mente**!

Como duas mentem e três dizem a verdade, chegamos aos seguintes resultados finais:

Amanda diz a verdade!
Berenice mente!
Camila diz a verdade!
Denise mente!
Eunice diz a verdade!

Quais são as respostas às seguintes perguntas?
1) O escore está 13 a 12? → **Amanda** diz que SIM!
2) A Ulbra está vencendo este set? → **Camila** e **Eunice** dizem que SIM!
3) Quem vai sacar é a equipe visitante? → **Eunice** diz que SIM!

Resposta: alternativa **B**.

04. (CVM – 2000) Beatriz encontrava-se em viagem por um país distante, habitado pelos vingos e pelos mingos. Os vingos sempre dizem a verdade; já os mingos sempre mentem. Certo dia, vendo-se perdida em uma estrada, Beatriz dirigiu-se a um jovem que por ali passava e perguntou-lhe: "Esta estrada leva à Aldeia Azul?". O jovem respondeu-lhe: "Sim, esta estrada leva à Aldeia Azul". Como não soubesse se o jovem era vingo ou mingo, Beatriz fez-lhe outra pergunta: "E se eu te perguntasse se és mingo, o que me responderias?". E o jovem respondeu: "Responderia que sim". Dadas as respostas do jovem, Beatriz pôde concluir corretamente que

a) o jovem era mingo e a estrada não levava à Aldeia Azul
b) o jovem era mingo e a estrada levava à Aldeia Azul
c) o jovem era vingo e a estrada não levava à Aldeia Azul
d) o jovem era vingo e a estrada levava à Aldeia Azul
e) o jovem poderia ser vingo ou mingo, e a estrada levava à Aldeia Azul

Sol.:
Temos as seguintes informações trazidas no enunciado da questão:

1) Um país distante é habitado pelos **vingos** e pelos **mingos**.
2) Os **vingos** sempre **dizem a verdade**; já os **mingos** sempre **mentem**.

Beatriz faz duas perguntas a um jovem:

1ª) Esta estrada leva à Aldeia Azul?
Resposta: "Sim, esta estrada leva à Aldeia Azul".

2ª) E se eu te perguntasse se és mingo, o que me responderias?
Resposta: "Responderia que sim".

Até o momento não sabemos se o jovem é vingo ou mingo! Vamos supor que **ele seja vingo**, e analisaremos as perguntas e respostas acima para testar esta suposição!

→ **Análise da 1ª pergunta e resposta:** Esta estrada leva à Aldeia Azul? "Sim, esta estrada leva à Aldeia Azul".

Como supomos que o jovem é vingo, logo a sua resposta é verdadeira, e obtemos que é **verdade** que **a estrada leva à Aldeia Azul**!
Vamos analisar a outra pergunta!

→ **Análise da 2ª pergunta e resposta:** E se eu te perguntasse se és mingo, o que me responderias? "Responderia que sim".

Como supomos que o jovem é vingo, a resposta a pergunta acima deve ser NÃO! Entretanto, o jovem respondeu SIM! Ou seja, ocorreu uma contradição, daí a suposição inicial de que o jovem é vingo não é correta! Então, o **jovem é mingo**!

Sabendo que o jovem é mingo (mentiroso), vamos analisar novamente as perguntas e respostas para descobrir se a estrada leva, ou não, a aldeia azul!

→ **Análise da 1ª pergunta e resposta:** Esta estrada leva à Aldeia Azul? "Sim, esta estrada leva à Aldeia Azul".

Já sabemos que o jovem mente, portanto quando ele diz **SIM** na resposta acima, significa que a resposta verdadeira (correta) é **NÃO**! Assim, **a estrada não leva à Aldeia Azul**!

Assim, obtemos:
O jovem é mingo!
A estrada não leva à Aldeia Azul!

Resposta: alternativa **A**.

05. (CGM RJ 2003 FJG) Juca, João e José fizeram as seguintes afirmações:
Juca: Eu fui aprovado no concurso ou José foi aprovado no concurso.
João: Se José não foi aprovado no concurso, então eu fui aprovado no concurso.
José: Eu fui aprovado no concurso ou João foi aprovado no concurso.
Admitindo-se que apenas uma das três afirmações acima seja verdadeira, é correto concluir que:
A) José foi aprovado no concurso
B) Juca foi aprovado no concurso
C) Juca e João foram aprovados no concurso
D) José e João foram aprovados no concurso

Sol.:

De acordo com os dados fornecidos na questão, temos três hipóteses possíveis:

	1ª hipótese	2ª hipótese	3ª hipótese
Afirmação de Juca	verdadeira	falsa	falsa
Afirmação de João	falsa	verdadeira	falsa
Afirmação de José	falsa	falsa	verdadeira

→ Vamos testar a 1ª hipótese:

- Segundo a 1ª hipótese, temos:
1ª) **Juca:** Eu fui aprovado no concurso **ou** José foi aprovado no concurso ⇒ **verdadeira**.
2ª) **João:** José não foi aprovado no concurso → eu fui aprovado no concurso ⇒ **falsa**.
3ª) **José:** Eu fui aprovado no concurso **ou** João foi aprovado no concurso ⇒ **falsa**.

A **afirmação de João** é uma condicional, e para que ela seja falsa, é necessário que a 1ª parte da condicional seja verdadeira e a segunda seja falsa, ou seja:
"**José não foi aprovado no concurso**" é **verdade**!
"**Eu (João) fui aprovado no concurso**" é **falso**!

A **afirmação de José** é uma disjunção, e para que ela seja falsa, é necessário que ambas as partes sejam falsas, ou seja:
"**Eu (José) fui aprovado no concurso**" é **falso**!
"**João foi aprovado no concurso**" é **falso**!

Até o momento não houve contradições, e já obtemos que:
"**José não foi aprovado no concurso**" é **verdade**!
"**João não foi aprovado no concurso**" é **verdade**!

Passemos a analisar a **afirmação de Juca**! A segunda parte da sua afirmação é falsa, então para que a afirmação como um todo seja verdadeira é necessário que a primeira parte seja verdadeira, ou seja: "**Eu (Juca) fui aprovado no concurso**" é **verdade**!

Finalizamos o teste da 1ª hipótese e não encontramos contradições nela, daí esta hipótese está correta! E os resultados obtidos para esta hipótese foram:
"**José não foi aprovado no concurso**" é **verdade**!
"**João não foi aprovado no concurso**" é **verdade**!
"**Juca foi aprovado no concurso**" é **verdade**!

Resposta: alternativa **B**.

Falaremos, agora, acerca da Análise Combinatória!

O assunto não é difícil, ao contrário. Só precisa ser bem entendido.

Questões de análise combinatória serão aquelas que perguntarão de quantas formas pode ocorrer um determinado evento. Vejamos alguns exemplos:

1) De quantas formas diferentes cinco pessoas podem se sentar em cinco cadeiras de uma fila de cinema?

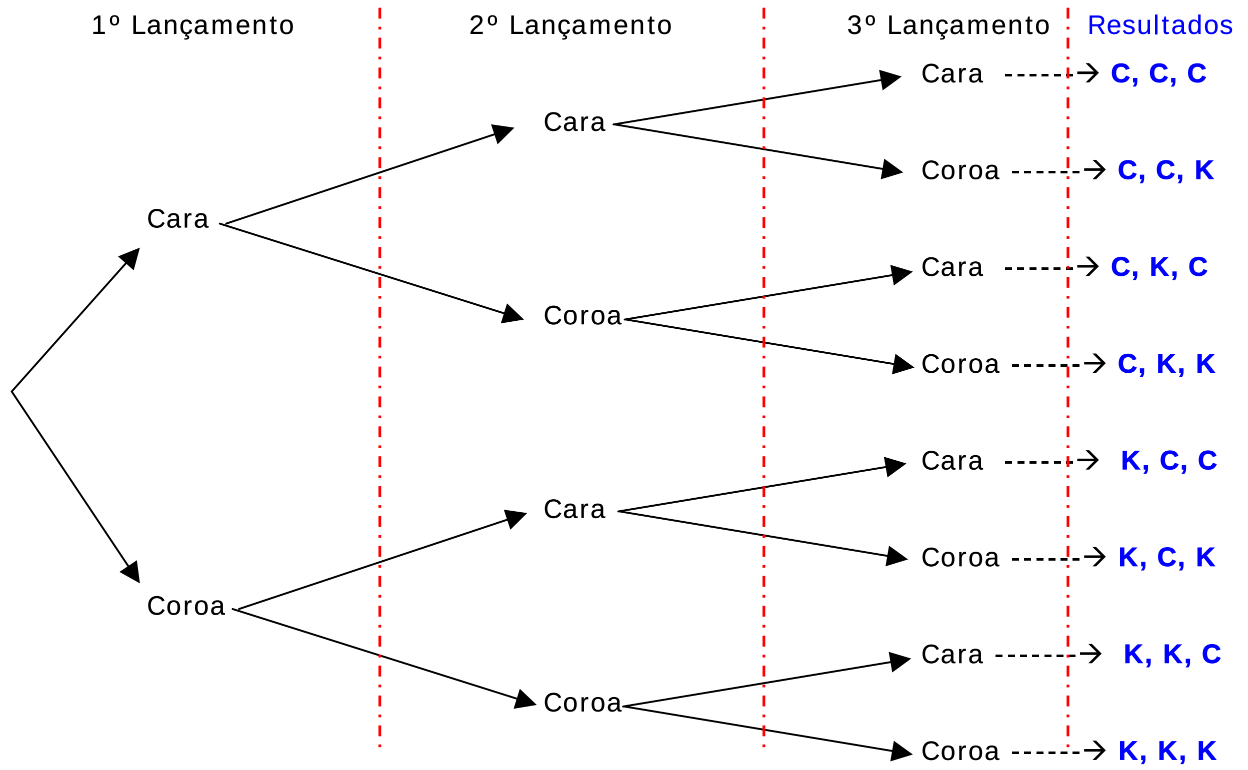
2) Quantos números de três algarismos podem ser formados, dispondo-se dos algarismos (1, 2, 3, 4, 5)?

3) Quantos tipos de saladas, feita de três tipos de frutas diferentes, podem ser formados com as seguintes frutas: banana, maçã, pêra, uva, laranja, mamão, melão?

Enfim! Situações como essas acima serão resolvidas por meio de técnicas que conheceremos a partir de agora. Ou seja, a Análise Combinatória se presta ao seguinte: a descobrir o número de maneiras possíveis de se realizar um determinado evento, sem que seja necessário *descrever* todas essas maneiras!

Um exemplo melhor, para esclarecer o que foi dito: suponhamos que eu tenho uma moeda na mão e vou lançá-la três vezes para o ar. A pergunta é: quantos são os resultados possíveis para esses três lançamentos da moeda?

Ora, se fôssemos tentar descrever todas as possibilidades, poderíamos fazê-lo por intermédio de um desenho, chamado *diagrama da árvore*. Da seguinte forma:



Nos resultados, chamamos *cara* de **C**, e *coroa* de **k**. E assim, por meio do desenho acima, percebemos que há oito diferentes possíveis resultados para o lançamento de uma moeda três vezes! Ocorre que seria muito custoso termos que, a cada novo problema, fazer o tal do *diagrama da árvore*!

Aí entra a Análise Combinatória! Usando *técnicas* simples, podemos chegar ao resultado procurado, sem precisar *desenhar* as resultados possíveis!

 # Princípio Fundamental da Contagem:

Chamaremos essa primeira técnica apenas de *Princípio Fundamental*. Ok?

Consiste em quê? Consistem em dividirmos o nosso evento em *etapas*. E para cada uma dessas etapas, individualmente analisadas, descobriremos qual o seu número de resultados possíveis!

Tomemos o exemplo da moeda acima. O evento consiste em lançar uma moeda três vezes. Daí, fica bem fácil dividi-lo em etapas: cada etapa será um lançamento. Confere?

Destarte, teremos:

1ª etapa) 1º lançamento da moeda;

2ª etapa) 2º lançamento da moeda;

3ª etapa) 3º lançamento da moeda.

Pois bem! Conforme dissemos, temos que descobrir os resultados possíveis *individuais* de cada etapa.

Ou seja, ao lançarmos a moeda a primeira vez, quantos serão os resultados possíveis para esse primeiro lançamento? Dois, obviamente! (Cara ou coroa!). O mesmo se dará com o segundo lançamento e com o terceiro. Daí, teremos:

1ª etapa) 1º lançamento da moeda → **2 resultados possíveis**

2ª etapa) 2º lançamento da moeda → **2 resultados possíveis**

3ª etapa) 3º lançamento da moeda → **2 resultados possíveis**

Finalmente, o *Princípio Fundamental* vem nos dizer: agora, basta multiplicar os resultados parciais (de cada etapa), e teremos o resultado total (para todo o evento)!

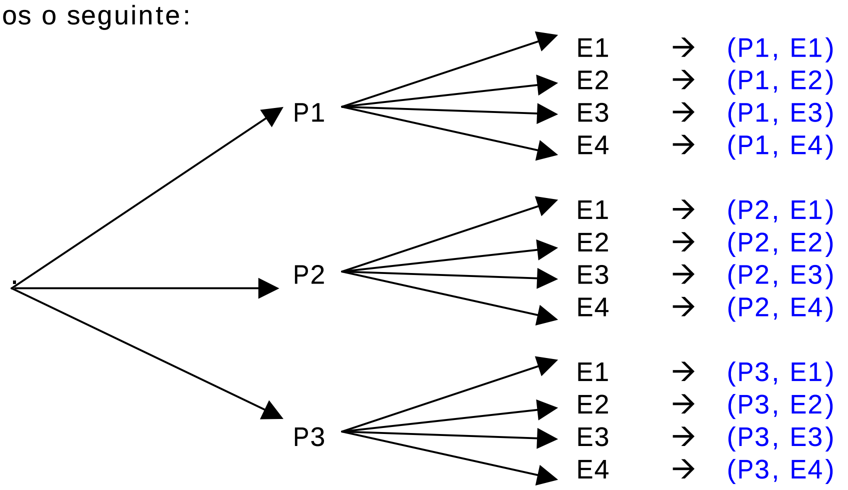
Teremos: **2x2x2= 8** → A mesma resposta do *diagrama da árvore*!

Sem precisarmos fazer desenho algum, concluímos que há oito possíveis resultados para o lançamento de uma moeda três vezes!

Passemos a outro exemplo, igualmente simples:

"Num hospital, existem 3 portas de entrada (P1, P2 e P3) que dão para um saguão, no qual existem 4 elevadores (E1, E2, E3 e E4). Um visitante deve dirigir-se ao 5º andar, utilizando um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

Caso decidíssemos tentar *desenhar* uma resolução, mediante o *diagrama da árvore*, faríamos o seguinte:



Em azul, estão as **doze** possibilidades distintas de, usando uma das três portas e um dos quatro elevadores, chegarmos ao quinto andar!

Ocorre que já aprendemos que o tal desenho acima é desnecessário! Mais rápido e eficaz será utilizar o *princípio da contagem*. Para tanto, dividiremos o evento (chegar ao 5º andar do hospital) em duas etapas:

1ª etapa) a escolha de uma porta de entrada;

2ª etapa) a escolha de um elevador.

Feito isso, descobriremos o número de resultados possíveis, *individualmente*, para cada etapa. Teremos:

1ª etapa) a escolha de uma porta de entrada → 3 resultados possíveis;

2ª etapa) a escolha de um elevador ----------→ 4 resultados possíveis.

Manda o *princípio da contagem* que multipliquemos os resultados parciais, e teremos:

→ **3x4=12** → A mesma resposta do *diagrama da árvore*!

A partir dos dois exemplos que acabamos de ver, já é possível apresentar formalmente o *princípio fundamental da contagem*. Vejamos:

Enunciado do Princípio da Contagem:

Se um acontecimento pode ocorrer por várias **etapas sucessivas e independentes** de tal modo que:

P1 é o número de possibilidades da 1ª etapa;
P2 é o número de possibilidades da 2ª etapa;
.
.
Pk é o número de possibilidades da "k-ésima" etapa, então:

(P1 x P2 x ... x Pk) é o número total de possibilidades do acontecimento ocorrer!

Seguiremos apresentando e resolvendo alguns outros exemplos que podem ser resolvidos empregando-se o *princípio fundamental da contagem*:

→ Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Sol.:

Quais serão as *etapas* desse evento? Ora, a definição do 1º colocado, a do 2º e a do 3º!

Três etapas, portanto. Teremos:

→ 1ª etapa) Definição do 1º colocado → 4 resultados possíveis;

→ 2ª etapa) Definição do 2º colocado → 3 resultados possíveis;

→ 3ª etapa) Definição do 3º colocado → 2 resultados possíveis.

Multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

→ 4x3x2 = **24 → Resposta!**

Ou seja, podem ser formados 24 diferentes resultados de 1º, 2º e 3º colocados numa corrida, dispondo-se de 4 competidores.

→ De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

Sol.:

Fila indiana, você sabe, é aquela em que uma pessoa fica atrás da outra.

Daí, as etapas do evento serão: definir quem vai na cabeça da fila, quem vai no meio e quem vai no fim.

Teremos:

→ 1ª etapa) definição do 1º da fila: 3 resultados possíveis;

→ 2ª etapa) definição do 2º da fila: 2 resultados possíveis;

→ 3ª etapa) definição do 3º da fila: 1 resultado possível.

Daí, multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

→ 3x2x1 **= 6 → Resposta!**

Podem ser formadas seis diferentes filas indianas, com três pessoas!

→ João vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

Sol.:

Qual é o evento? Ora, é fazer uma refeição! Pelos dados da questão, as etapas para a composição deste evento (e os resultados possíveis para cada uma delas) serão as seguintes:

1ª etapa) definição da carne → 8 resultados possíveis;

2ª etapa) definição da sobremesa → 5 resultados possíveis.

Multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

→ 8x5 = **40 → Resposta!**

Podem ser compostas 40 distintas refeições, dispondo-se de oito tipos de carne e 5 tipos de sobremesa!

→ Numa festa existem 80 homens e 90 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

Sol.:

O objetivo é formar um casal. Ora, um casal é composto de um homem e uma mulher! Logo, para cumprir esse objetivo, dividiremos o evento em duas etapas:

1ª etapa) escolha do homem → 80 resultados possíveis;

2ª etapa) escolha da mulher → 90 resultados possíveis.

Pelo *princípio da contagem*, multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

→ 80x90 = **7200 → Resposta!**

→ O sistema telefônico de São Paulo utiliza sete dígitos para designar os diversos telefones. Supondo que o primeiro dígito seja sempre dois (2), e que o dígito zero (0) não seja utilizado para designar estações (2º e 3º dígitos), quantos números de telefones diferentes poderemos ter?

Sol.:

O evento agora é compor um número de telefone, observando as restrições previstas no enunciado! Como teremos 7 dígitos, trabalharemos também com 7 etapas! Cada etapa corresponde, naturalmente, à escolha do respectivo dígito.

Este exemplo se diferencia dos anteriores, pois aqui teremos que redobrar nossa atenção, uma vez que o enunciado estabelece *exigências específicas* para algumas das etapas do evento. Por exemplo, é dito que o primeiro dígito será sempre 2. É dito também que na escolha do segundo e do terceiro dígitos não poderemos usar o algarismo zero!

Essas *restrições* terão que ser observadas quando formos fazer o cálculo dos *resultados parciais*! Teremos:

1ª etapa) Definição do 1º dígito → 1 resultado possível (só pode ser “2”);

2ª etapa) Definição do 2º dígito → 9 resultados possíveis.

Senão, vejamos: dispomos dos algarismos do sistema decimal, para escolher um deles que ocupará o 2º dígito. São eles: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9}. São dez algarismos! Ocorre que o enunciado *amarra* que o algarismo zero não pode ocupar essa segunda casa! Daí, restam nove resultados possíveis! Idêntico raciocínio se repetirá para a próxima etapa.

3ª etapa) Definição do 3º dígito → 9 resultados possíveis.

4ª etapa) Definição do 4º dígito → 10 resultados possíveis!

Aqui não há nenhuma exigência específica, e nenhuma restrição! Ou seja, pode ser usado qualquer algarismo do sistema decimal (e são 10!). O mesmo raciocínio se repetirá para as três últimas etapas.

5ª etapa) Definição do 5º dígito → 10 resultados possíveis.

6ª etapa) Definição do 6º dígito → 10 resultados possíveis.

7ª etapa) Definição do 7º dígito → 10 resultados possíveis.

Finalmente, multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

→ 1x9x9x10x10x10x10 = **810.000 → Resposta!**

 # Arranjo e Combinação:

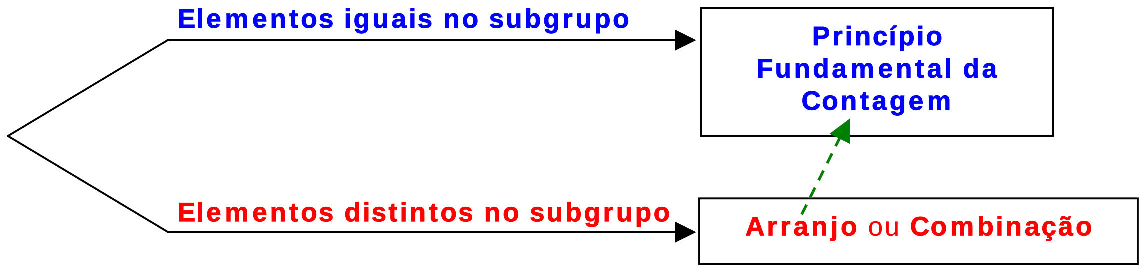
Duas outras técnicas serão comumente usadas na resolução de problemas de Análise Combinatória. Estamos falando do Arranjo e da Combinação!

O importante é sabermos que, para cada caso específico de situação, haverá um *caminho de resolução* adequado. Se o *diagnóstico* de uma questão é *Arranjo*, ela terá que ser resolvida por *Arranjo*; se é *Combinação*, terá que ser resolvida por *combinação*!

Ou seja, se a questão é de tal forma que a resolução correta se faz por Arranjo e você equivocadamente a resolve por Combinação, infelizmente a sua resposta estará errada, e você acaba de perder um ponto precioso na prova!

Com isso, concluímos que a *alma* da Análise Combinatória consiste em saber identificar qual é o correto *caminho de resolução*!

E isso, amigos, é extremamente fácil! Traçaremos um método! Vejamos:



Esse diagrama acima será nosso guia! Por meio dele não há como errarmos na escolha do *caminho de resolução*!

Mas, o que significa esse comando: *elementos iguais no subgrupo* ou *elementos distintos no subgrupo*?

Ora, sempre que formos pensar um problema de análise combinatória, estaremos trabalhando com elementos de um *conjunto universo* e tentando construir conjuntos menores, chamados *subgrupos*.

Vejamos os três exemplos seguintes, que nos ajudarão a entender melhor:

Exemplo 1) Quantos números de três algarismos podem ser formados, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Quem é o conjunto universo? {1, 2, 3, 4, 5}

E quem será o subgrupo? Será um conjunto de apenas três algarismos!

Formar esse subgrupo é o nosso objetivo!

Neste exemplo, a questão especificou que os elementos do subgrupo tenham que ser distintos? Ou podem ser iguais? Ora, se a questão não *amarrou* que o subgrupo tem que ter elementos diferentes, então fica subentendido que eles podem ser repetidos!

Daí, já sabemos que o *caminho de resolução* será o Princípio da Contagem!

Exemplo 2) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Quem é o conjunto universo? O mesmo do exemplo anterior: {1, 2, 3, 4, 5}

O subgrupo agora terá quantos elementos? Três, da mesma forma!

Podem os elementos do subgrupo repetir-se? Não! A questão estabeleceu que terão de ser elementos *distintos*!

Com isso, concluímos: o *caminho de resolução* seguirá pelo Arranjo ou pela Combinação!

Mas qual dos dois? Arranjo ou Combinação? *Güenta aí*, que explicaremos já!

Exemplo 3) Dispondo das seguintes espécies de frutas {maçã, mamão, melão, banana, pêra, uva, laranja e melancia}, quantos tipos de saladas podem ser formadas, contendo três tipos de frutas?

Quem é o conjunto universo? É o das frutas disponíveis:

{maçã, mamão, melão, banana, pêra, uva, laranja e melancia}

E o subgrupo, qual será? Será aquela salada que formaremos, com apenas três tipos de frutas! A pergunta: o subgrupo terá que ter elementos diferentes? Obviamente que sim! Não dá para formar uma salada com banana, banana e banana. Concordam? Embora o enunciado não tenha dito isso expressamente, fica entendido, por evidente, que a salada tem que ser formada por três tipos *distintos* de frutas!

Assim sendo, concluímos: o *caminho de resolução* é o do Arranjo ou da Combinação! Mas qual desses dois? Arranjo ou Combinação?

 # Decidindo entre o Arranjo e a Combinação:

Uma vez superado o primeiro momento, e considerando que já sabemos que a questão será resolvida por Arranjo ou Combinação, seguiremos os passos seguintes, a fim de nos definirmos por uma ou por outra técnica de resolução. Vejamos:

1º Passo) Criaremos um resultado possível para o subgrupo;

2º Passo) Inverteremos a ordem do resultado que acabamos de criar (no 1º passo);

3º Passo) Compararemos os dois resultados que estão diante de nós (1º e 2º passos):

→ Se forem resultados diferentes: resolveremos a questão por Arranjo!

→ Se forem resultados iguais: resolveremos a questão por Combinação!

Retornemos aos dois últimos exemplos, para os quais já havíamos decidido que seriam resolvidos por Arranjo ou por Combinação. Teremos:

Exemplo 2) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

E agora, Arranjo ou Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível, podemos ter: **(1 2 3)**

O número cento e vinte e três. Pode ser? Claro!

2º Passo) Invertendo a ordem do resultado criado: **(3 2 1)**

Chegamos ao número trezentos e vinte e um.

3º Passo) A comparação! São iguais ou diferentes os dois resultados acima?

Ora, tratando-se de números, é claro que são distintos!

Conclusão: resolveremos a questão por **Arranjo**!

Exemplo 3) Dispondo das seguintes espécies de frutas {maçã, mamão, melão, banana, pêra, uva, laranja e melancia}, quantos tipos de saladas podem ser formadas, contendo três tipos de frutas?

Será Arranjo ou será Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível: **(mamão, melão e maçã)**

Gostaram da minha salada? Se não gostaram, vai ela mesma!

2º Passo) Invertamos a ordem! Teremos: **(maçã, melão e mamão)**

3º Passo) Comparemos:

A salada do primeiro passo é igual ou é diferente da salada do segundo passo? O sabor é o mesmo? Claro que sim! Os resultados são iguais!

Conclusão: a questão *sai* por **Combinação**!

É somente isso! Se vocês se lembrarem destes três exemplos simples acima, serão capazes de identificar o *caminho de resolução* de qualquer questão de Análise Combinatória!

Resolvendo questões por Arranjo:

Uma vez sabendo identificar quais as questões que se resolvem por Arranjo, resta saber como se dá tal resolução!

A fórmula do Arranjo é a seguinte:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Onde:

→ **n** é o número de elementos do conjunto universo; e

→ **p** é o número de elementos do subgrupo.

Para quem anda mais esquecido, esse sinal de interrogação (!) significa a operação *fatorial*. Trata-se, tão-somente, de um produto que se inicia com o próprio valor (que antecede o sinal "!") e vai se reduzindo até chegar a um.

Exemplos:

→ 8!=8x7x6x5x4x3x2x1

→ 5!=5x4x3x2x1

E assim por diante!

Observem que, sempre que formos fazer uma divisão entre fatoriais, repetiremos o menor deles, e desenvolveremos o maior até que se iguale ao menor.

Exemplo:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!}$$

Viram? E agora? Ora, agora resta cortarmos o 5! do numerador com o do denominador. E teremos apenas que:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!} = 8x7x6$$

Fácil, não? Mais fácil que roubar doce de criança! Pois bem, voltemos ao exemplo dois da página anterior:

Exemplo 2) Quantos números de três algarismos **distintos** podem ser formados, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Sol.:

Primeira análise: os elementos do subgrupo podem ser iguais ou têm que ser distintos? Distintos, pois assim estabelece o enunciado. Daí, resolveremos por Arranjo ou Combinação!

Segunda análise: *sairá* por Arranjo ou Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível, podemos ter: **(1 2 3)**

2º Passo) Invertendo a ordem do resultado criado: **(3 2 1)**

3º Passo) A comparação: os resultados são distintos! → **Arranjo**!

Arranjo *de quantos em quantos*? De 5 em subgrupos de 3. Teremos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \rightarrow A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5x4x3x2!}{2!} = 5x4x3 = \mathbf{60} \rightarrow \textbf{Resposta!}$$

Ou seja, podemos formar 60 números com 3 algarismos distintos, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Uma pergunta deveras oportuna seria: *não dava para resolver essa questão pelo Princípio da Contagem*? Vejamos: nosso evento é formar um número de três algarismos distintos. Podemos dividi-lo em três etapas: definição do primeiro algarismo, definição do segundo e definição do terceiro. Teremos:

→ 1ª etapa) definição do primeiro algarismo: 5 resultados possíveis;

→ 2ª etapa) definição do segundo algarismo: 4 resultados possíveis;

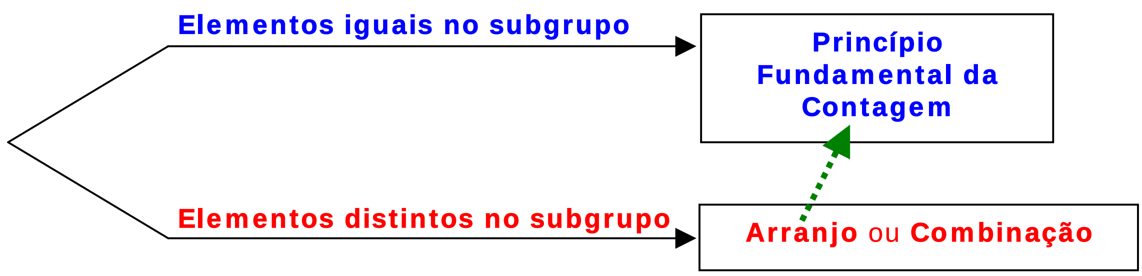
→ 3ª etapa) definição do terceiro algarismo: 3 resultados possíveis.

Multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

→ 5x4x3= **60 → Resposta!**

Mesma resposta que chegamos pelo Arranjo!

Olhemos de novo, e com mais calma, o diagrama dos *caminhos de resolução*:



Repare bem na seta em cor verde! Reparou?

O que ela quer indicar? O seguinte: se você descobrir que a questão deve ser resolvida por *Arranjo*, então poderá também resolvê-la pelo *Princípio da Contagem*!

Observe que se trata de uma seta com sentido único! De Arranjo para Princípio da Contagem! Apenas isso! O caminho de volta – Princípio da Contagem para Arranjo – nem sempre será possível!

E de Combinação para Princípio da Contagem? Dá certo? **De jeito nenhum!** Basta olhar para o desenho acima, e não tem erro! Ok?

Próxima pergunta recorrente: ora, se questão de Arranjo sai pelo Princípio da Contagem, então eu preciso mesmo saber esse tal de Arranjo? A resposta é **SIM**, você precisa! Mais adiante, veremos o porquê!

 # Resolvendo questões por Combinação:

A fórmula da Combinação é a seguinte:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Onde:

→ **n** é o número de elementos do conjunto universo; e

→ **p** é o número de elementos do subgrupo.

Retornemos ao exemplo 03, apresentado anteriormente:

Exemplo 3) Dispondo das seguintes espécies de frutas {maçã, mamão, melão, banana, pêra, uva, laranja e melancia}, quantos tipos de saladas podem ser formadas, contendo três tipos de frutas?

Primeira análise: os elementos do subgrupo podem ser iguais ou têm que ser distintos? Distintos, pois, embora não dito isso expressamente pelo enunciado, fica claro que não podemos formar saladas com frutas iguais! Uma salada já é, por si, uma mistura de frutas de tipos diferentes! Daí, usaremos Arranjo ou Combinação!

Segunda análise: *sairá* por Arranjo ou Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível, podemos ter: **(macã, pêra e uva)**

2º Passo) Invertendo a ordem do resultado criado: **(uva, pêra e maçã)**

3º Passo) A comparação: os resultados são iguais! → **Combinação**!

Combinação *de quantos em quantos*? De 8 (tipos de frutas do conjunto universo) em subgrupos de 3 (tipos de frutas da salada que formaremos!). Teremos:

$$C_{n,p}=\frac{n!}{p!(n-p)!} \rightarrow C_{8,3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!.5!}=\frac{8x7x6x\cancel{5}!}{\cancel{5}!.3x2x1}=\frac{8x7x\cancel{6}}{\cancel{3}x\cancel{2}x1}=$$ **56 → Resposta!**

Ou seja: podem ser formados 56 tipos de saladas, com três espécies de frutas, dispondo daquelas oito espécies relacionadas!

 # Permutação:

A Permutação, meus amigos, é tão-somente um caso particular do Arranjo!

Caso nos omitíssemos de falar em Permutação, vocês acertariam a questão do mesmo jeito, aplicando o Arranjo! Mas não é o caso! Melhor é conhecê-la!

Quando estivermos em uma questão de Arranjo (já sabemos como identificá-la!) e observarmos que o **n** (número de elementos do "conjunto universo") é igual ao **p** (número de elementos dos subgrupos), então estaremos diante de uma questão de **Permutação**!

Consideremos os exemplos abaixo, os quais são meras variações dos que vimos no Arranjo.

Exemplo 1) Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de cinco dígitos distintos poderão ser formados?

Sol.: A questão é de Arranjo, conforme já havíamos verificado. Arranjo de quanto em quanto?

O grupo maior tem **cinco** elementos, ou seja: **n=5**.

E os subgrupos terão também **cinco** elementos, ou seja: **p=5**.

Ora, quando a questão é de **Arranjo**, e temos que **n = p**, dizemos então que estamos em um caso de **Permutação**.

Em outras palavras: $\mathbf{A_{5,5} = P_5}$ (leia-se: "permutação de cinco")

O bom é que o cálculo da **Permutação** é até mais fácil.

→ Fórmula da Permutação: $Pn = n!$

Onde: → **n** é o número de elementos do *conjunto universo*, que é também o mesmo número de elementos dos subgrupos que serão formados!

Voltando ao nosso exemplo, teremos que:

$A_{5,5} = \mathbf{P_5} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ **120 → Resposta!**

Exemplo 02) Quatro carros (C1, C2, C3 e C4) disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os quatro primeiros lugares?

Sol.: Também já sabemos que é uma questão de **Arranjo**! Agora, o grupo maior tem 4 elementos (n=4) e os subgrupos que serão formados também terão esse mesmo número de elementos (p=4). Daí, *caímos* no caso particular da **Permutação**!

Teremos, pois, que:

$A_{4,4} = \mathbf{P_4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ **24 → Resposta!**

Agora, passemos a estudar um tipo de questão que é bastante abordado em concursos.

Explanaremos este tema em seis situações possíveis. Adiante!

 # Seis Amigos no Cinema:

SITUAÇÃO 1) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas?

Sol.:

Iniciemos nossa análise do princípio!

1ª Indagação: na hora de formar os *subgrupos*, poderemos usar elementos iguais? Ou terão que ser distintos?

Ora, os elementos do subgrupo serão pessoas! Logo, não há como formar um subgrupo com várias pessoas iguais! Obviamente, os elementos terão de ser *diferentes*! Primeira conclusão: o caminho de resolução é o do Arranjo ou da Combinação!

2ª Indagação: Arranjo ou Combinação?

Daí, seguimos aquele procedimento já nosso conhecido:

1º Passo) criamos um resultado possível. (Chamemos as pessoas de A, B, C, D, E e F). Teremos, pois, que um resultado possível seria esse mesmo:

→ **A-B-C-D-E-F**

(Com a pessoa **A** na ponta da esquerda e a pessoa **F** na da direita!)

2º Passo) Invertemos a ordem dos elementos do resultado acima. Teremos:

→ **F-E-D-C-B-A**

3º Passo) Comparamos os resultados!

Atenção à pergunta seguinte: as pessoas dos dois resultados são as mesmas?

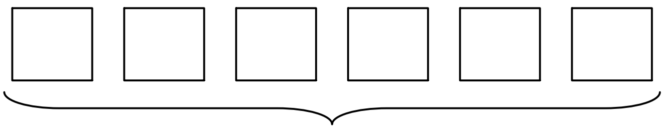
A resposta é sim! Mas, e as duas *filas*, são as mesmas?

Não! São diferentes! E o que interessa neste caso são as filas formadas!

Temos, portanto, *resultados distintos*! **Conclusão:** Trabalharemos com **Arranjo**!

Arranjo de quantos em quantos? São 6 pessoas no conjunto universo, e são seis elementos na fila (no subgrupo). Logo, Arranjo de 6 em 6: $\mathbf{A_{6,6}}$, que é igual a Permutação de 6. Ou seja: $\mathbf{A_{6,6} = P_6}$

Então, para esse enunciado, faremos:



P_6 = 6! = 6x5x4x3x2x1 = 720 → Resposta!

SITUAÇÃO 2) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que <u>as três moças fiquem sempre juntas</u>?

Sol.:

Este enunciado difere do anterior por um breve *detalhe*! É exigido aqui que as três moças permaneçam juntas!

Ora, já nos é possível concluir, seguindo o mesmíssimo raciocínio do exemplo anterior, que esta questão será resolvida pelo *caminho* da Permutação!

Em face da exigência anunciada, lançaremos mão de um *artifício*: passaremos a considerar as pessoas que têm de estar sempre juntas como sendo uma única pessoa!

Além disso, neste presente exemplo, em vez de trabalharmos apenas com uma permutação, teremos que trabalhar com duas:

1ª Permutação) Para todo o conjunto de pessoas (atentando para o fato de que as três moças que são inseparáveis serão consideradas uma só);

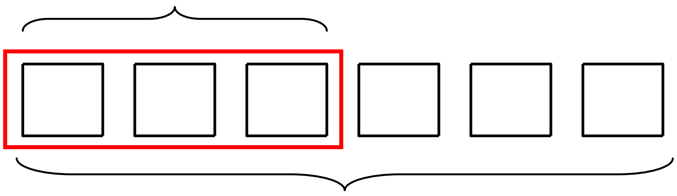
Daí, com três homens e uma mulher (três inseparáveis = uma apenas!), somamos um total de quatro pessoas! Permutando-as, teremos: $\mathbf{P_4}$ = 4! = **24** formações.

2ª Permutação) Para o conjunto dos elementos inseparáveis (as três moças):

Permutando as três mulheres, teremos: $\mathbf{P_3}$ = 3! = **6** formações

Vejamos a ilustração abaixo:

$\mathbf{P_3 = 3x2x1 = 6}$



$\mathbf{P_4 = 4! = 4x3x2x1 = 24}$

Esses dois resultados parciais (24 e 6), referentes ao conjunto inteiro e aos elementos inseparáveis, terão que ser agora multiplicados, para chegarmos ao resultado final. Teremos:

→ 6x24= **144 → Resposta!**

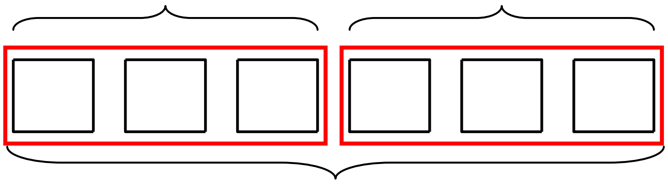
SITUAÇÃO 3) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que <u>os três rapazes fiquem sempre juntos</u> e <u>as três moças fiquem sempre juntas</u>?

Sol.:

Agora a exigência específica cria dois subgrupos de elementos inseparáveis. Já sabemos como proceder com eles.

Teremos:

$\mathbf{P_3=3x2x1=6}$ $\mathbf{P_3=3x2x1=6}$



$\mathbf{P_2 = 2! = 2x1 = 2}$

Observemos que a permutação para o conjunto completo foi apenas $\mathbf{P_2}$. Claro! Uma vez que os três rapazes são considerados um só, e as três moças idem! É o nosso *artifício* dos elementos inseparáveis! Não podemos esquecer dele!

Daí, compondo nosso resultado, teremos:

→ 6x6x2= **72 → Resposta!**

SITUAÇÃO 4) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que <u>as três moças fiquem separadas</u>?

Sol.: O enunciado agora não exige mais que alguns elementos fiquem juntos, mas separados!

Ora, se do total de formas possíveis de organizar os amigos (resposta da situação 1) subtrairmos o número de formas pelas quais as moças ficarão sempre juntas (resposta da situação 2), o resultado que encontraremos é exatamente o que pede neste exemplo. Ou seja:

Total de formações possíveis dos 6 amigos	–	Total de formações com as moças juntas	=	Total de formações com as moças separadas

Daí, faremos: → 720 – 144 = **576 → Resposta!**

SITUAÇÃO 5) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que rapazes e moças fiquem sempre alternados?

Sol.:

Agora é o seguinte: rapaz sempre ao lado de moça, e vice-versa! Teremos duas situações possíveis: 1ª) a fila começando com um rapaz na esquerda; e 2ª) a fila começando com uma moça na esquerda. Trabalhando a primeira situação possível, teremos:

R	**M**	**R**	**M**	**R**	**M**

Neste caso, teremos os três rapazes **permutando** entre si, enquanto que o mesmo se dá em relação às moças!

→ Permutação dos rapazes: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

→ Permutação das moças: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

Compondo nosso resultado, **para esta primeira situação**, teremos:

→ 6x6= **36**

Ocorre que a questão não acaba aí, uma vez que já havíamos constatado que há uma outra possibilidade: a de que a fila comece com uma moça à esquerda (ao invés de um rapaz)! Teremos:

M	**R**	**M**	**R**	**M**	**R**

Aqui novamente as três moças permutarão entre si, enquanto que os três rapazes também permutarão entre si! Faremos:

→ Permutação das moças: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

→ Permutação dos rapazes: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

Compondo nosso resultado, **para esta segunda situação**, teremos igualmente:

→ 6x6= **36**

Finalmente, **somando os resultados parciais** (rapaz à esquerda e moça à esquerda), teremos:

→ 36+36= **72 → Resposta!**

SITUAÇÃO 6) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que **somente** as moças fiquem todas juntas?

Sol.:

O que se pede nesta questão (por conta da palavra **somente**) é o número de maneiras diferentes em que as 3 moças fiquem sempre juntas enquanto que os 3 rapazes não fiquem todos juntos.

1ª Solução:

Assim, para que os três homens não fiquem todos juntos é necessário que as moças fiquem juntas no meio da fila. Reparem que as moças não podem estar juntas nas pontas, pois assim os três homens ficariam juntos! Há duas situações possíveis para o posicionamento das moças:

1ª situação: $\boxed{R}\ \underbrace{\boxed{M}\ \boxed{M}\ \boxed{M}}_{\text{3 moças}}\ \boxed{R}\ \boxed{R}$

2ª situação: $\boxed{R}\ \boxed{R}\ \underbrace{\boxed{M}\ \boxed{M}\ \boxed{M}}_{\text{3 moças}}\ \boxed{R}$

Na **primeira situação** teremos os três rapazes **permutando** entre si, enquanto que o mesmo se dá em relação às moças!

→ Permutação dos rapazes: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

→ Permutação das moças: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

Compondo nosso resultado, **para esta primeira situação**, teremos:

→ 6x6= **36**

Da mesma forma, na **segunda situação** teremos os três rapazes **permutando** entre si, enquanto que o mesmo se dá em relação às moças!

→ Permutação dos rapazes: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

→ Permutação das moças: $\mathbf{P_3 = 3! = 3x2x1 = 6}$

Compondo nosso resultado, **para esta segunda situação**, teremos:

→ 6x6= **36**

Finalmente, **somando os resultados parciais** teremos:

→ 36+36= **72 → Resposta!**

2ª solução:

Se do total de formas possíveis em que as mulheres ficam juntas (resposta da situação 2) subtrairmos o número de formas pelas quais os três rapazes fiquem sempre juntos e as três moças fiquem sempre juntas (resposta da situação 3), o resultado que encontraremos é exatamente o que se pede neste exemplo. Ou seja:

Total de formações com as moças juntas	-	Total de formações com as moças juntas e com os homens juntos	=	Total de formações em que **somente** as mulheres ficam juntas

Daí, faremos: → 144 – 72 = **72 → Resposta!**

Pois bem, meus amigos! A essência do assunto já foi vista!

De aqui em diante, trabalharemos com questões e mais questões, mesclando resoluções de Arranjo, Permutação e de Combinação, até nos familiarizarmos definitivamente com essa tal de Análise Combinatória!

Conceitos incidentais surgirão, possivelmente, ao longo das próximas resoluções, conforme veremos!

Mas a essência do assunto, insistimos, já é do conhecimento de todos!

Exercícios Diversos:

01) Um edifício tem 8 (oito) portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Sol.:

Iniciemos nossa análise. Qual é o objetivo da questão? Fazer com que uma pessoa entre e saia de um edifício. Para tanto, disporá a pessoa de um total de oito portas!

Ocorre que o enunciado determina que a porta de saída deverá ser diferente da de entrada. Em suma: precisamos escolher uma porta para entrar e uma para sair, de um total de oito portas!

Daí:

Conjunto Universo: {Porta1, Porta2, Porta3, Porta4, Porta5, Porta6, Porta7, Porta8}

Subgrupo: Porta de entrada Porta de saída

1ª Pergunta) Os elementos do subgrupo podem ser iguais? **Não**! O enunciado estabelece que têm que ser diferentes! **Conclusão**: seguiremos pelo Arranjo ou Combinação!

2ª Pergunta) Arranjo ou Combinação?

→ Criemos um resultado possível: **Entrada: Porta 1 – Saída: Porta 2**

→ Invertamos a ordem do resultado criado: **Entrada: Porta 2 – Saída: Porta 1**

→ Comparemos os resultados acima: Iguais ou diferentes? **Diferentes**

Logo, resolveremos por **Arranjo**!

Dá na mesma resolver pelo Princípio da Contagem? Claro! (Não esqueçamos da seta verde do *caminho das pedras*!)

Daí, teremos:

→ 1ª etapa) Escolha da porta de entrada: 8 resultados possíveis;

→ 2ª etapa) Escolha da porta de saída: 7 resultados possíveis.

Multiplicando-se os resultados individuais, teremos:

→ 8 x 7 = **56 → Resposta!**

Obs.: Você pode (e deve!) conferir que esse resultado é o mesmo ao qual chegaríamos caso tivéssemos resolvido por Arranjo! ($\mathbf{A_{8,2}=56}$).

02) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI? P9=9!

Sol.:

A primeira coisa a se fazer aqui é explicar o conceito de *anagrama*.

Anagrama é apenas uma formação qualquer que se possa criar com um determinado grupo de letras. Essa formação qualquer não precisa ser uma palavra, um vocábulo que conste no dicionário! Pode ser algo mesmo ininteligível. Contanto que seja formado por aquelas letras.

Daí, se eu tenho as letras da palavra **SAPO**, são exemplos de anagramas os seguintes:

→ (S O P A) , (A S P O) , (A S O P), (P S O A), (O P S A) etc.

Perceba que, no anagrama, cada letra é utilizada uma só vez! Ou seja, se vou criar anagramas com as letras da palavra *sapo* (4 letras!), então meus anagramas terão também 4 letras!

Ficou claro?

Pois bem! Daí, nosso conjunto universo é o seguinte: {A, B, C, D, E, F, G, H, I}

E o subgrupo será o próprio anagrama, ou seja, um conjunto que terá o mesmo número de letras do conjunto universo!

1ª Pergunta) Poderemos repetir os elementos do conjunto universo no subgrupo? **Não**! Se o fizéssemos, estaríamos fugindo do conceito de anagrama. Conclusão: Arranjo ou Combinação!

2ª Pergunta) Arranjo ou Combinação?

→ Criando um resultado possível, teremos: **{A B C D E F G H I}**

→ Invertendo-se a ordem, teremos: **{I H G F E D C B A}**

São anagramas iguais? Não! São diferentes! Logo, trabalharemos com Arranjo!

Arranjo de quantos em quantos? De 9 (número de elementos do conjunto universo) em 9 (número de elementos do subgrupo)!

Ora, estamos diante de uma **Permutação**! Uma vez que: $\mathbf{A_{9,9}=P_9}$.

Daí, podemos até generalizar: se a questão é de *anagrama*, sairá sempre por Arranjo!

(Diga-se de passagem que a Esaf não gosta muito de anagramas...)

Teremos, pois, que: $\mathbf{A_{9,9}=}$ **9! → Resposta!**

03) Temos 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas podemos formar uma comissão de 3 pessoas? 165 **Comb**

Sol.:

Conjunto universo: {5 homens, 6 mulheres}

Subgrupo: 3 pessoas.

Elementos do subgrupo podem ser iguais? Não! São pessoas, logo, têm que ser diferentes! Daí, Arranjo ou Combinação!

→ Um resultado possível: {João, Maria, José}

→ Invertendo: {José, Maria, João}

Pergunta: a comissão formada por João, Maria e José é diferente da formada por José, Maria e João? Claro que não! São a mesmíssima comissão! Daí: **Combinação**!

De quantos em quantos? De 11 (total de elementos do conjunto universo) em 3 (total de elementos do subgrupo). Teremos:

$$C_{11,3}=\frac{11!}{3!.8!}=\frac{11x10x9x8!}{8!.3x2x1}=\frac{990}{6}=\mathbf{165}\ \rightarrow\ \textbf{Resposta!}$$

04) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por uma vogal e terminando por uma consoante?

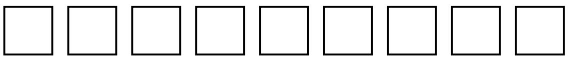
Sol.:

Vimos agora há pouco (questão 2), que anagrama se resolve por permutação! E o que há de novo neste enunciado? Ora, aqui são feitas duas exigências, referentes aos elementos que ocuparão a primeira e a última posição do anagrama!

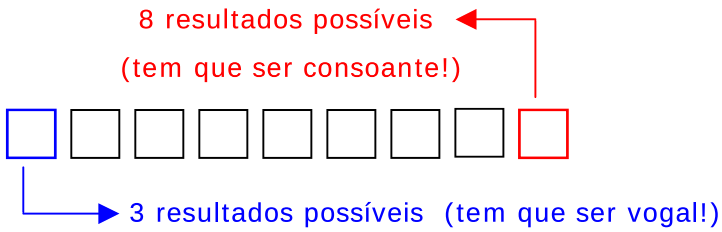
Perceberam? Foi *amarrado* pelo enunciado que o nosso anagrama tem que começar por vogal e que terminar por uma consoante.

Daí, trabalharemos em separado as posições contempladas por essas exigências.

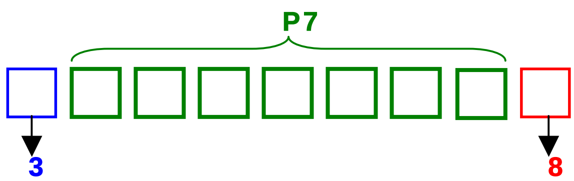
Vejamos nosso conjunto universo: **{A B C D E F G H I}**

E nosso subgrupo: 

O artifício consistirá sempre nisso: trabalhar em separado as posições para as quais foi feita alguma exigência específica. Teremos:



E quanto aos elementos do meio do anagrama? Permutação neles! Teremos:



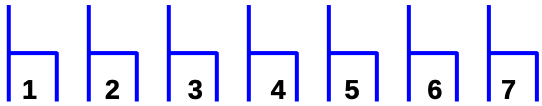
Finalmente, para chegarmos ao resultado final, multiplicaremos os resultados parciais!

Teremos: → 6x3xP7 = **6x3x7! = Resposta!**

05) Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7, e desejamos escolher 4 lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

Sol.:

Nosso conjunto universo é uma seqüência de sete cadeiras:



O objetivo é formar subgrupos com quarto dessas cadeiras!

Tem que ser cadeiras distintas? Claro! Obviamente que sim! Daí, o caminho de resolução segue o Arranjo ou a Combinação! Qual deles?

→ Criando um resultado possível: **{cadeira 1, cadeira 2, cadeira 3, cadeira 4}**

→ Invertendo o resultado: **{cadeira 4, cadeira 3, cadeira 2, cadeira 1}**

Pergunta: o primeiro conjunto de cadeiras é diferente do segundo?

Não! São exatamente iguais! Conclusão: trabalharemos com a Combinação! Teremos:

→ $C_{7,4} = \frac{7!}{4!.3!} = \frac{7x\cancel{6}x5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}x\cancel{3}x\cancel{2}x1} =$ **35 → Resposta!**

06) Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

Sol.:

Conjunto universo: **{20 times}**

Objetivo da questão: formar subgrupos de 3 times – os 3 primeiros colocados.

Tem que ser times distintos? Claro! Não dá (infelizmente) para termos o Corinthians como primeiro, segundo e terceiro colocado do campeonato... Daí, os elementos do subgrupo terão que ser distintos! Conclusão: usaremos Arranjo ou Combinação para resolver o problema!

Qual deles?

→ Criando um resultado possível: **{1°)Corinthians, 2° Flamengo), 3°) Fortaleza }**

→ Invertendo: **{1°) Fortaleza, 2°)Flamengo, 3°)Corinthians}**

São resultados iguais? Claro que não! Daí, trabalharemos com o Arranjo! Teremos:

→ $A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = \frac{20x19x18x17!}{17!} =$ **6.840 → Resposta!**

07) Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões? R) 3003 **Comb**

Sol.:

Conjunto universo: {15 questões}

O objetivo é selecionar um subgrupo de 10 questões!

Obviamente que tem ser questões diferentes! Logo, arranjo ou combinação!

→ Um resultado possível: {**Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10**}

→ Invertendo-se a ordem:{**Q10, Q9, Q8, Q7, Q6, Q5, Q4, Q3, Q2, Q1**}

São provas diferentes? Não! São perfeitamente iguais! Logo, Combinação! Teremos:

→ $C_{15,10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{\cancel{1}5x14x13x12x11x\cancel{1}0!}{\cancel{1}0!.\cancel{5}x4x\cancel{3}x2x1} =$ **3.003 → Resposta!**

08) Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada, respectivamente?

Sol.:

O conjunto universo é um grupo de 16 estações.

O objetivo é formar um bilhete, que defina uma partida e uma chegada.

Estação de partida e estação de chegada podem ser iguais? Não! Tem que ser distintas! Logo, trabalharemos com Arranjo ou Combinação!

→ Criando um resultado possível:

Partida	Chegada
Estação A	Estação B

→ Invertendo o resultado acima:

Partida	Chegada
Estação B	Estação A

São bilhetes iguais? Obviamente que não! São distintos! Daí, concluímos: vamos trabalhar com Arranjo! Teremos:

→ $A_{16,2} = \frac{16!}{14!} = \frac{16x15x14!}{14!} =$ **240 → Resposta!**

09) Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião? **Comb**

Sol.:

Primeiramente, vamos descobrir do que se trata. Há um conjunto maior (conjunto universo), formado pelas pessoas que estão participando de uma reunião. Dispondo desse conjunto de pessoas, formaremos grupos menores (subgrupos) de duas pessoas cada. Serão as pessoas que trocarão apertos de mão. (É de se supor que esses apertos de mão estão sendo trocados entre duas pessoas, obviamente)!

Daí, se os subgrupos são formados por duas pessoas que vão trocar um aperto de mão, também se depreende que essas pessoas têm que ser distintas. (Não se imagina ninguém cumprimentando a si mesmo com um aperto de mão, certo? Estamos numa reunião social, não num hospício!)

E chegamos à primeira conclusão: se os elementos dos subgrupos serão necessariamente distintos, trabalharemos ou com Arranjo ou com Combinação!

Criemos um resultado possível: um aperto de mão entre o JOÃO e o JOSÉ. Invertamos esse resultado: um aperto de mão entre o JOSÉ e o JOÃO. É o mesmo resultado ou outro diferente? Claro que é o mesmo resultado. Daí, concluímos: trabalharemos com **Combinação**.

Sabemos que os subgrupos são formados por dois elementos (**p=2**), mas e o conjunto universo? Conhecemos quantos elementos tem? Não! É isso o que a questão quer saber. Chamaremos esse número de **X**.

E quanto a esse valor "45", fornecido pelo enunciado? Será o resultado da Combinação. Ou seja, é o número de "duplas" que poderão ser formadas, combinando as pessoas que estão naquela reunião.

Daí, teremos: $\mathbf{C_{x,2} = 45}$.

Desenvolvendo nossos cálculos, teremos:

$$C_{X,2} = \frac{X!}{2!(X-2)!} = \frac{X.(X-1).(X-2)!}{2!.(X-2)!} = \frac{X.(X-1)}{2x1} = \frac{X^2 - X}{2}$$

Sabendo que: $C_{x,2} = 45$, teremos:

$$\frac{X^2 - X}{2} = 45 \rightarrow \mathbf{X^2 - X - 90 = 0} \text{ (Equação do 2º grau)}$$

Para os mais esquecidos, uma equação do 2º grau, ou seja, uma equação do tipo $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ será resolvida da seguinte forma:

$$X = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Resolvendo a equação acima, teremos:

$$X = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \rightarrow X = 1 \pm \frac{\sqrt{1 + 4x1x90}}{2x1} = 1 \pm \frac{\sqrt{361}}{2} = 1 \pm \frac{19}{2}$$

Haverá duas raízes (dois resultados) para nossa equação, quais sejam:

X' = (1+19)/2 → **X'=10** e X'' = (1-19)/2 → **X''=-9**

Como X representa um número de pessoas, jamais poderia ser um valor negativo. Desprezamos, portanto, o resultado X''=-9, e concluímos que nossa resposta será X=10.

X=10 → Resposta!

10) Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, ..., 9. O segredo do cofre é formado por uma seqüência de 3 dígitos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo? (Suponha que a pessoa sabe que o segredo é formado por dígitos distintos.) 720 **Arr**

Sol.:

Nosso conjunto universo é formado pelos algarismos do sistema decimal: {0, 1, 2,...,9}

O objetivo é criar uma *senha* com três dígitos distintos!

Ora, se o subgrupo será composto por elementos distintos, então trabalharemos com Arranjo ou Combinação!

Para definir o *caminho de resolução* aplicável a este problema, criamos um resultado possível: a senha **{1 – 2 – 3}**

Invertendo os elementos desta senha, teremos: **{3 – 2 – 1}**.

São senhas iguais? Não! São distintas! Logo, trabalharemos com Arranjo. Teremos:

→ $A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = \frac{10x9x8x7!}{7!} =$ **720 → Resposta!**

Já temos material suficiente para estudarmos esta semana!

Convém que vocês refaçam todos os exemplos apresentados até aqui. Para cada um deles, relembre o raciocínio utilizado para descobrirmos o *caminho de resolução* adequado!

Na seqüência, apresentamos algumas outras questões, no nosso *Dever de Casa*!

E na próxima semana, daremos continuidade ao estudo deste assunto, complementando o que foi visto com alguns conceitos restantes!

Fiquem todos com Deus e um forte abraço!

Dever de Casa

01.(BNB 2002 FCC) Apesar de todos caminhos levarem a Roma, eles passam por diversos lugares antes. Considerando-se que existem três caminhos a seguir quando se deseja ir da cidade A para a cidade B, e que existem mais cinco opções da cidade B para Roma, qual a quantidade de caminhos que se pode tomar para ir de A até Roma, passando necessariamente por B?

a) Oito
b) Dez
c) Quinze
d) Dezesseis
e) Vinte

02.(AFCE TCU 99 ESAF) A senha para um programa de computador consiste em uma seqüência LLNNN, onde "L" representa uma letra qualquer do alfabeto normal de 26 letras e "N" é um algarismo de 0 a 9. Tanto letras como algarismos podem ou não ser repetidos, mas é essencial que as letras sejam introduzidas em primeiro lugar, antes dos algarismos. Sabendo que o programa não faz distinção entre letras maiúsculas e minúsculas, o número total de diferentes senhas possíveis é dado por:

a) $2^{26}\ 3^{10}$
b) $26^{2}\ 10^{3}$
c) $2^{26}\ 2^{10}$
d) 26! 10!
e) $C_{26,2}\ C_{10,3}$

03.(Anal. Orçamento MARE 99 ESAF) Para entrar na sala da diretoria de uma empresa é preciso abrir dois cadeados. Cada cadeado é aberto por meio de uma senha. Cada senha é constituída por 3 algarismos distintos. Nessas condições, o número máximo de tentativas para abrir os cadeados é

a) 518 400
b) 1 440
c) 720
d) 120
e) 54

04.(Analista MPU Administrativa 2004 ESAF) Quatro casais compram ingressos para oito lugares contíguos em uma mesma fila no teatro. O número de diferentes maneiras em que podem sentar-se de modo a que a) homens e mulheres sentem-se em lugares alternados; e que b) todos os homens sentem-se juntos e que todas as mulheres sentem-se juntas, são, respectivamente,

a) 1112 e 1152.
b) 1152 e 1100.
c) 1152 e 1152.
d) 384 e 1112.
e) 112 e 384.

05.(Oficial de Chancelaria 2002 ESAF) Chico, Caio e Caco vão ao teatro com suas amigas Biba e Beti, e desejam sentar-se, os cinco, lado a lado, na mesma fila. O número de maneiras pelas quais eles podem distribuir-se nos assentos de modo que Chico e Beti fiquem sempre juntos, um ao lado do outro, é igual a:

a) 16
b) 24
c) 32
d) 46
e) 48

Gabarito:

1.c 2.b 3.a 4.c 5.e