AULA TREZE: Probabilidade (Parte II)

Olá, amigos!

Continuaremos (e concluiremos) hoje nosso estudo sobre Probabilidade. Estamos ingressando na segunda metade do nosso *Curso*! Convém tentarmos manter os estudos em dia, resolvendo sempre o *dever de casa*, anotando as dúvidas, fazendo resumos etc.

Passemos agora à resolução do *dever de casa* passado.

DEVER DE CASA

01. (MPU/2004) Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a probabilidade de Ana estar hoje em Paris é 3/7, que a probabilidade de Beatriz estar hoje em Paris é 2/7, e que a probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em Paris é 1/7. Carlos então recebe um telefonema de Ana, informando que ela está hoje em Paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos agora estima corretamente que a probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris é igual a:

a) 1/7
b) 1/3
c) 2/3
d) 5/7
e) 4/7

Sol.: Conforme procedemos na aula 12, tentaremos estabelecer uma divisão em partes do enunciado dessa questão! Vejamos:

"Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a probabilidade de Ana estar hoje em Paris é 3/7, que a probabilidade de Beatriz estar hoje em Paris é 2/7, e que a probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em Paris é 1/7. Carlos então recebe um telefonema de Ana, informando que ela está hoje em Paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos agora estima corretamente que a probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris é igual a?"

A primeira parte (em azul) informa algumas probabilidades, que repetimos abaixo:

P (Ana em Paris) = 3/7

P (Beatriz em Paris) = 2/7

P (Ana em Paris e Beatriz em Paris) = 1/7

A segunda parte (em vermelho) é uma informação adicional que nos revela um **fato**. Algo que passa a ser do nosso conhecimento! Não é uma probabilidade: é um **fato dado**!

A terceira parte (em verde) é a pergunta da questão! Juntando essa pergunta ao **fato dado**, teremos a seguinte pergunta completa que a questão tem interesse:

"Qual a probabilidade de

Beatriz estar hoje em Paris, dado que Ana estar hoje em Paris?"

Estamos diante de uma **probabilidade condicional**!

Na linguagem da probabilidade, teremos: **P(Beatriz em Paris dado Ana em Paris)=?**

Aí é só aplicar a fórmula da **probabilidade condicional**. Teremos:

$$\rightarrow \textbf{P(Beatriz em Paris dado Ana em Paris)} = \frac{\textbf{P(Beatriz em Paris e Ana em Paris)}}{\textbf{P(Ana em Paris)}}$$

Nós já dispomos das probabilidades que aparecem no numerador e no denominador da fórmula acima, daí, é só nós substituirmos os valores e efetuarmos a divisão:

$$\rightarrow \textbf{P(Beatriz em Paris dado Ana em Paris)} = \frac{1/7}{3/7} = \frac{1}{3}$$ **→ Resposta!**

02. (MPU/2004) Os registros mostram que a probabilidade de um vendedor fazer uma venda em uma visita a um cliente potencial é 0,4. Supondo que as decisões de compra dos clientes são eventos independentes, então a probabilidade de que o vendedor faça no mínimo uma venda em três visitas é igual a:

a) 0,624
d) 0,568
b) 0,064
e) 0,784
c) 0,216

Sol.: O enunciado fornece os seguintes dados:

→ Probabilidade de um vendedor fazer uma venda em uma visita a um cliente potencial é 0,4, que representaremos por: **P(fazer uma venda a um cliente) = 0,4**

→ As decisões de compra dos clientes são eventos independentes. Isso significa que a decisão de compra de um determinado cliente **não** é influenciada pela decisão de compra de outro cliente. E em termos de probabilidade, a independência significa que:

P(vender para A e vender para B) = P(vender para A) x P(vender para B)

e também:

P(ñ vender para A e ñ vender para B) = P(ñ vender para A) x P(ñ vender para B)

A questão solicita a probabilidade de que **o vendedor faça no mínimo uma venda em três visitas**. A melhor maneira de obtermos o resultado dessa probabilidade é calculando a probabilidade do **evento excludente** (é a negação do evento dado).

Temos o evento: **o vendedor faça no mínimo uma venda em três visitas.**

O evento excludente é: **o vendedor não faça nenhuma venda em três visitas.**

A soma das probabilidades desses dois eventos é igual a 1, ou seja:

P(no mínimo uma venda) + P(nenhuma venda) = 1

Daí, se encontrarmos a probabilidade do evento excludente, basta subtrairmos de 1 para obtermos a resposta da questão.

Passemos ao cálculo da probabilidade: **P(nenhuma venda)** !

Considere que os três clientes sejam: A, B e C. Dessa forma, a probabilidade acima pode ser definida assim:

P(não vender para A e não vender para B e não vender para C)

Como foi dito na questão que as decisões de compra dos clientes são independentes, então essa probabilidade pode ser transformada no produto de três probabilidades:

P(não vender para A) x P(não vender para B) x P(não vender para C)

Foi dado no enunciado que: **P(fazer uma venda a um cliente) = 0,4**.

Logo, **P(não fazer uma venda a um cliente) = 1 – 0,4 = 0,6**

Daí, **P(não vender para A) x P(não vender para B) x P(não vender para C)** será igual a:

0,6 x 0,6 x 0,6 = 0,216

Substituindo este resultado na equação:

P(no mínimo uma venda) + P(nenhuma venda) = 1 ,

teremos:

P(no mínimo uma venda) + 0,216 = 1

E, assim:

P(no mínimo uma venda) = 0,784 → Resposta!

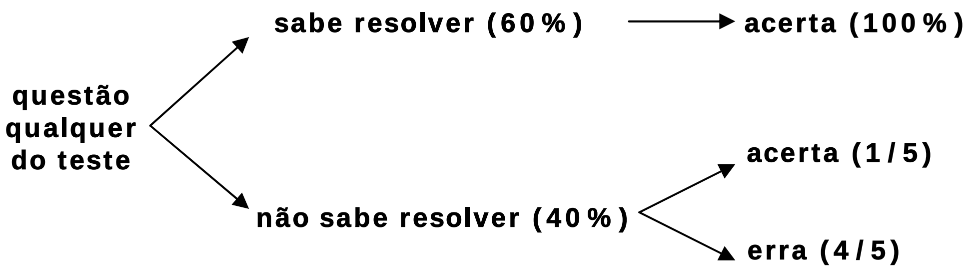
03. (MPU/2004) André está realizando um teste de múltipla escolha, em que cada questão apresenta 5 alternativas, sendo uma e apenas uma correta. Se André sabe resolver a questão, ele marca a resposta certa. Se ele não sabe, ele marca aleatoriamente uma das alternativas. André sabe 60% das questões do teste. Então, a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer do teste (isto é, de uma questão escolhida ao acaso) é igual a:

a) 0,62
b) 0,60
c) 0,68
d) 0,80
e) 0,56

Sol.:

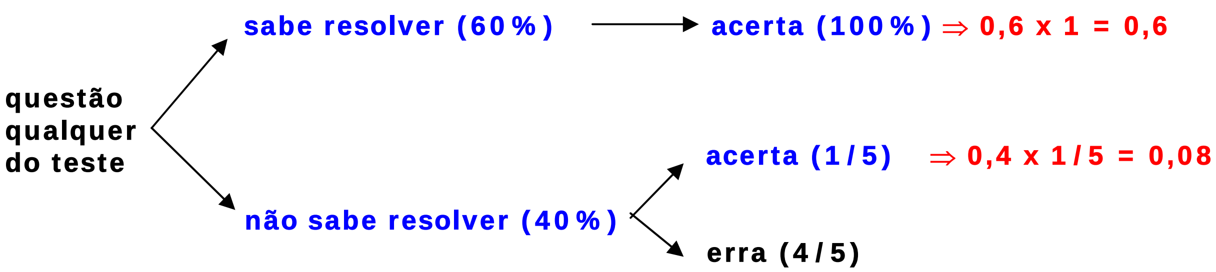
O André ao tentar resolver uma questão do teste, ele pode saber resolver a questão ou não! Se ele sabe, é claro que acertará a questão, e se ele não sabe, ainda poderá acertar a questão chutando uma das cinco alternativas, com probabilidade de acerto de **(1/5)**. Veja que essa questão apresenta ramificações, caminhos, que darão um resultado final. Logo, podemos utilizar a *árvore de probabilidades* para traçar os possíveis caminhos e nos ajudar a obter a alternativa correta.

Nossa *árvore de probabilidades*:



Qual é a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer do teste?

Há dois caminhos que nos conduzem a esse resultado **acertar uma questão**. E são justamente os seguintes:



Ora, como são dois os caminhos que nos conduzem ao resultado procurado, teremos portanto que **somar** essas duas *probabilidades resultantes* de ambos. Teremos, pois, que:

→ **0,6** + **0,08** = **0,68 → Resposta!**

---

04. (MPU/2004) Quando Lígia pára em um posto de gasolina, a probabilidade de ela pedir para verificar o nível de óleo é de 0,28; a probabilidade de ela pedir para verificar a pressão dos pneus é 0,11 e a probabilidade de ela pedir para verificar ambos, óleo e pneus, é de 0,04. Portanto, a probabilidade de Lígia parar em um posto de gasolina e não pedir nem para verificar o nível de óleo e nem para verificar a pressão nos pneus é igual a:

a) 0,25
b) 0,35
c) 0,45
d) 0,15
e) 0,65

Sol.: Vamos anotar as probabilidades fornecidas no enunciado:

P(ver o óleo) = 0,28

P(ver os pneus) = 0,11

P(ver o óleo e ver os pneus) = 0,04

E a questão solicita a seguinte probabilidade:

P(não ver o óleo e não ver os pneus)

Se a questão afirmasse que os eventos *ver o óleo* e *ver os pneus* são independentes, então podíamos separar a probabilidade acima em um produto de duas probabilidades, mas não é o caso dessa questão!

Será que essa questão se resolve por evento excludente, como fizemos na segunda questão? Vamos tentar? Vamos lá!

Temos o evento: **não ver o óleo e não ver os pneus.**

O evento excludente será a negação do evento acima. Para fazermos a negação desse evento, devemos lembrar da negação do conectivo "e" (1ª aula):

→ a negação de **(A e B)** é igual a **(não A ou não B)**

→ a negação de **(não A e não B)** é igual a **(A ou B)**

Daí, o evento excludente será: **ver o óleo ou ver os pneus**.

A soma das probabilidades do evento dado e do evento excludente, como já sabemos, é igual a 1.

Passemos a calcular a probabilidade do evento excludente:

P(ver o óleo ou ver os pneus)

Vamos aplicar a regra de probabilidade do "ou" :

P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A e B)

Assim, teremos:

P(ver o óleo ou pneus) = P(ver o óleo) + P(ver os pneus) – P(ver o óleo e pneus)

Substituindo os dados fornecidos na questão, obteremos:

P(ver o óleo ou pneus) = 0,28 + 0,11 – 0,04

Daí, **P(ver o óleo ou pneus) = 0,35**

Mas a questão ainda não terminou, pois o que se deseja é a probabilidade:

P(não ver o óleo e não ver os pneus)

E sabemos que:

P(não ver o óleo e não ver os pneus) = 1 - P(ver o óleo ou pneus)

Daí, **P(não ver o óleo e não ver os pneus) = 1 – 0,35 = 0,65 → Resposta!**

05. (MPOG 2001 ESAF) A probabilidade de ocorrer cara no lançamento de uma moeda viciada é igual a 2/3. Se ocorrer cara, seleciona-se aleatoriamente um número X do intervalo $\{X \in \mathbb{N} \mid 1 \leq X \leq 3\}$; se ocorrer coroa, seleciona-se aleatoriamente um número Y do intervalo $\{Y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq Y \leq 4\}$, onde $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais. Assim, a probabilidade de ocorrer um número par é igual a:

a) 7/18
b) 1/2
c) 3/7
d) 1/27
e) 2/9

Sol.:

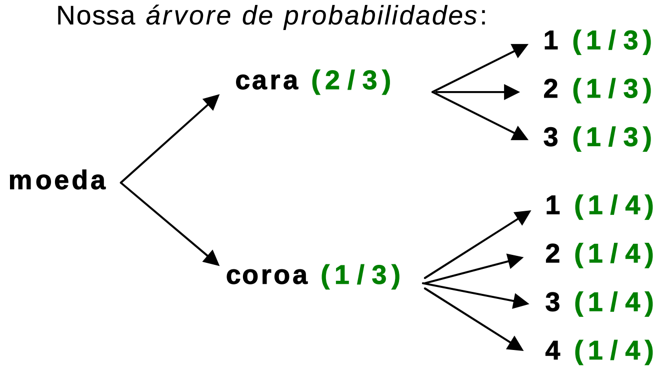
Primeiramente vamos encontrar os valores que X e Y podem assumir.

Como X é um número natural e **($1 \leq X \leq 3$)**, então os valores que **X** pode assumir são: **1, 2 e 3**.

Como Y é um número natural e **($1 \leq Y \leq 4$)**, então os valores que **Y** pode assumir são: **1, 2, 3 e 4**.

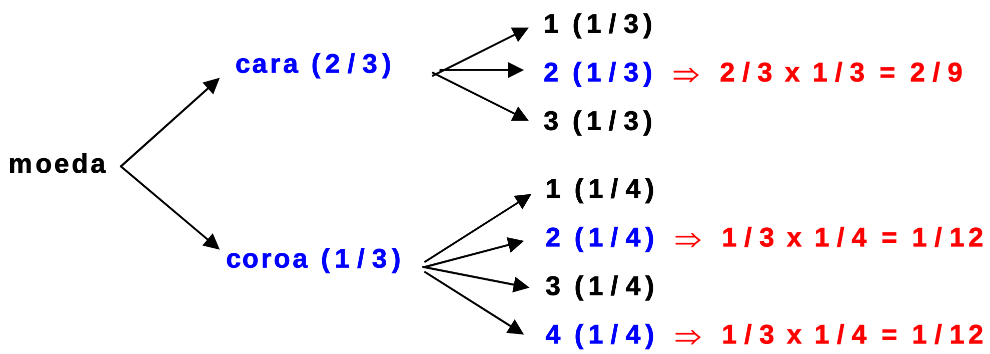
O enunciado afirma que no lançamento de uma moeda se o resultado é **cara**, então se escolhe um valor **X** (1, 2 ou 3), e se o resultado for **ímpar**, se escolhe um valor **Y** (1, 2, 3 ou 4). A probabilidade de se escolher um valor X (1, 2 ou 3) é (1/3), e a probabilidade de se escolher um valor Y (1, 2, 3 ou 4) é (1/4). Mais uma vez, observamos caminhos alternativos que darão um resultado final. Logo, podemos utilizar a *árvore de probabilidades* para traçar os possíveis caminhos e nos ajudar a obter a alternativa correta.

Nossa *árvore de probabilidades*:



Qual é a probabilidade de ocorrer um número par?

Há três caminhos que nos conduzem a esse resultado **um número par**. E são justamente os seguintes:



Ora, como são três os caminhos que nos conduzem ao resultado procurado, teremos portanto que **somar** essas três *probabilidades resultantes*. Teremos, pois, que:

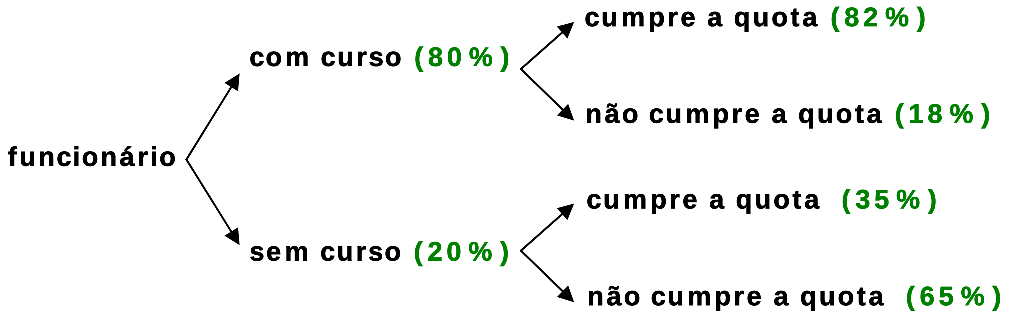
→ **2/9 + 1/12 + 1/12 = 14/36 = 7/18 → Resposta!**

06. (AFC-STN-2000 ESAF) Uma companhia preocupada com sua produtividade costuma oferecer cursos de treinamento a seus operários. A partir da experiência, verificou-se que um operário, recentemente admitido, que tenha freqüentado o curso de treinamento tem 82% de probabilidade de cumprir sua quota de produção. Por outro lado, um operário, também recentemente admitido, que não tenha freqüentado o mesmo curso de treinamento, tem apenas 35% de probabilidade de cumprir com sua quota de produção. Dos operários recentemente admitidos, 80% freqüentaram o curso de treinamento. Selecionando-se, aleatoriamente, um operário recentemente admitido na companhia, a probabilidade de que ele não cumpra sua quota de produção é

a) 11,70%
b) 27,40%
c) 35%
d) 83%
e) 85%

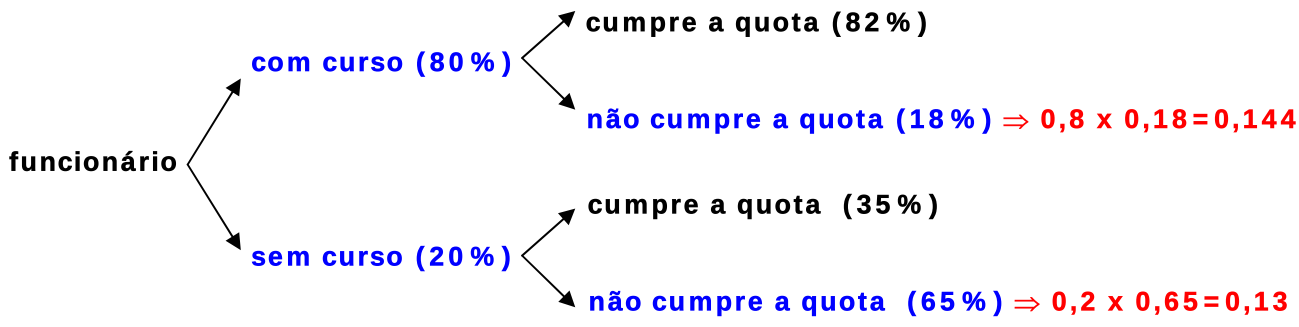
Sol.:

Construiremos a *árvore de probabilidades* com os dados trazidos no enunciado:



Qual é a probabilidade de que um funcionário não cumpra sua quota de produção?

Há dois caminhos que nos conduzem a esse resultado **não cumpre a quota**. E são justamente os seguintes:



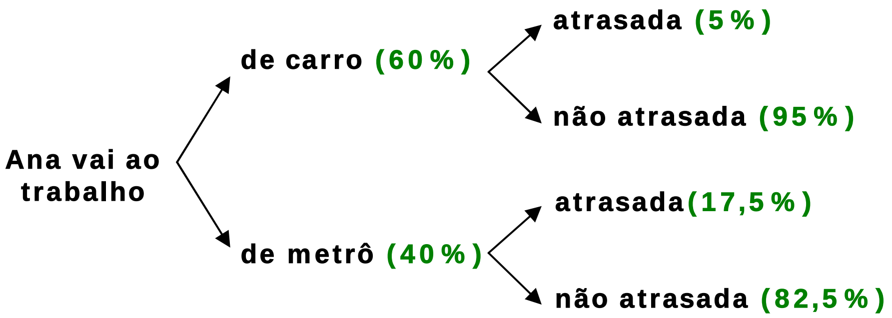
Ora, como são dois os caminhos que nos conduzem ao resultado procurado, teremos portanto que **somar** essas duas *probabilidades resultantes*. Teremos, pois, que:

→ **0,144 + 0,13 = 0,274 = 27,4% → Resposta!**

07. (AFC-SFC 2001 ESAF) Há apenas dois modos, mutuamente excludentes, de Ana ir para o trabalho: ou de carro ou de metrô. A probabilidade de Ana ir de carro é de 60% e de ir de metrô é de 40%. Quando ela vai de carro, a probabilidade de chegar atrasada é de 5%. Quando ela vai de metrô a probabilidade de chegar atrasada é de 17,5%. Em um dado dia, escolhido aleatoriamente, verificou-se que Ana chegou atrasada ao seu local de trabalho. A probabilidade de ela ter ido de carro nesse dia é:

a) 10%
b) 30%
c) 40%
d) 70%
e) 82,5%

Sol.: Construiremos a *árvore de probabilidades* com os dados trazidos no enunciado:



No cálculo da **probabilidade de Ana ter ido de carro**, devemos levar em conta que **ela chegou atrasada**, pois foi um fato que ocorreu segundo o enunciado, e isso vai interferir na resposta da questão.

A pergunta completa que a questão quer que nós respondamos é:

Qual é a probabilidade de Ana ter ido de carro, dado que ela chegou atrasada?

Estamos diante de uma **probabilidade condicional**!

Na linguagem da probabilidade, teremos:

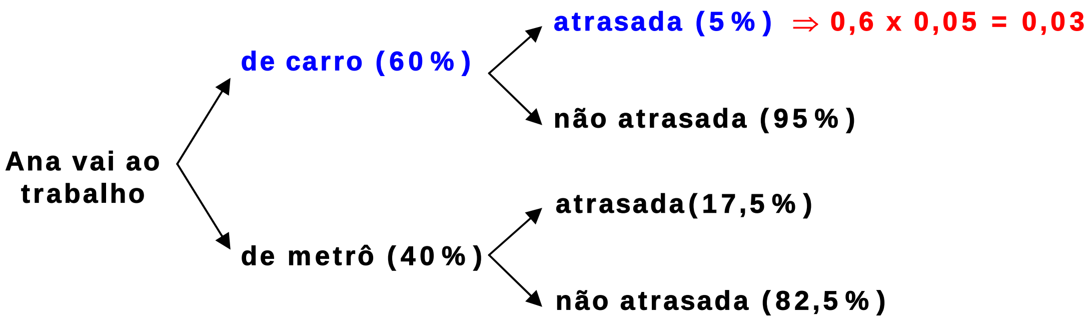
P(de carro dado atrasada)=?

Aí é só aplicar a fórmula da **probabilidade condicional**. Teremos:

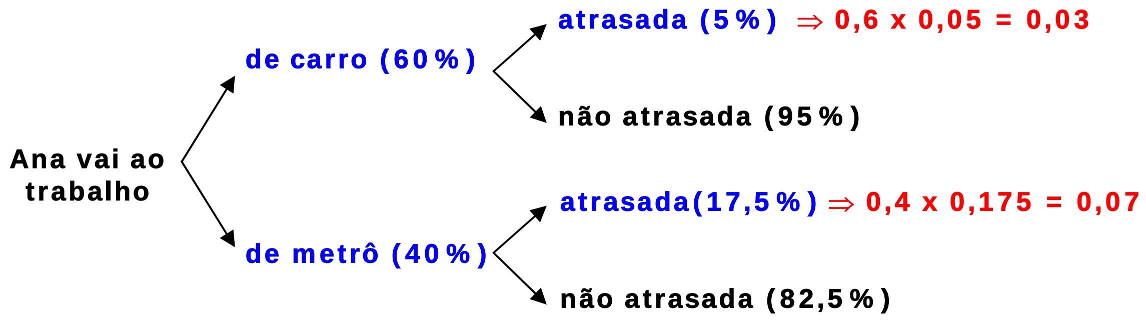
→ **P(de carro dado atrasada) = P(de carro e atrasada) / P(atrasada)**

Passemos ao cálculo das probabilidades que aparecem no numerador e no denominador da fórmula acima.

O numerador **P(de carro e atrasada)** será a probabilidade resultante de um único caminho de probabilidade. O primeiro deles! Vejamos:



Já no tocante ao denominador **P(atrasada)**, teremos que **somar** as *probabilidades resultantes* de dois caminhos de probabilidades para chegarmos a ele. Teremos:



Ou seja, **P(atrasada) = 0,03 + 0,07 = 0,1**

Daí, jogando os dados na fórmula da **probabilidade condicional**, teremos que:

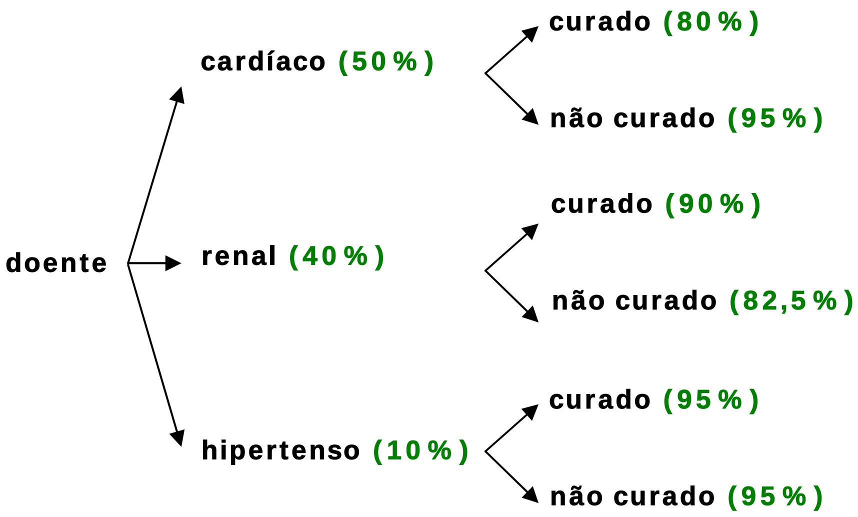
→ **P(de carro dado atrasada) = 0,03 / 0,1 = 0,3 = 30%** → **Resposta!**

---

08. (SERPRO 96) Uma clinica especializada trata apenas de três tipos de doentes: dos que sofrem de problemas cardíacos, dos que tem calculo renal e dos hipertensos. Temos que 50% dos pacientes que procuram a clinica são cardíacos, 40% são portadores de calculo renal e apenas 10% são hipertensos. Os problemas cardíacos são curados em 80% das vezes, os problemas de calculo renal em 90% das vezes e os hipertensos em 95% das vezes. Um enfermo saiu curado da clinica. Qual a probabilidade de ele sofresse de calculo renal?

a) 43,1%
b) 42,1%
c) 45,1%
d) 44,1%
e) 46,1%

Sol.: Construiremos a *árvore de probabilidades* com os dados trazidos no enunciado:



No cálculo da **probabilidade do enfermo sofrer de calculo renal**, devemos levar em conta o fato dado, ocorrido e informado no enunciado: **o enfermo saiu curado da clinica.**

A pergunta completa que a questão quer que nós respondamos é:

Qual é a probabilidade do enfermo sofresse de cálculo renal, dado que ele saiu curado da clínica?

Estamos diante de uma **probabilidade condicional**!

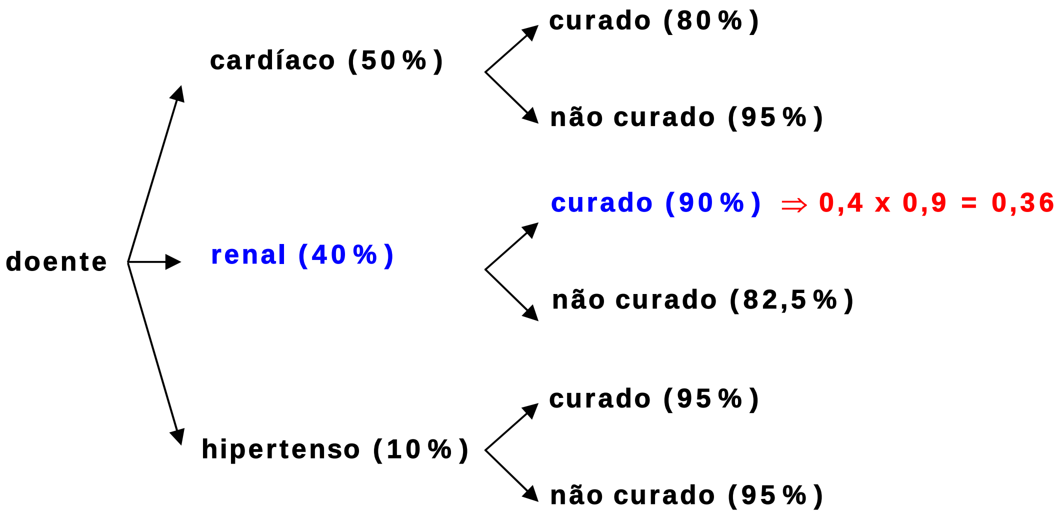
Na linguagem da probabilidade, teremos:

P(renal dado curado)=?

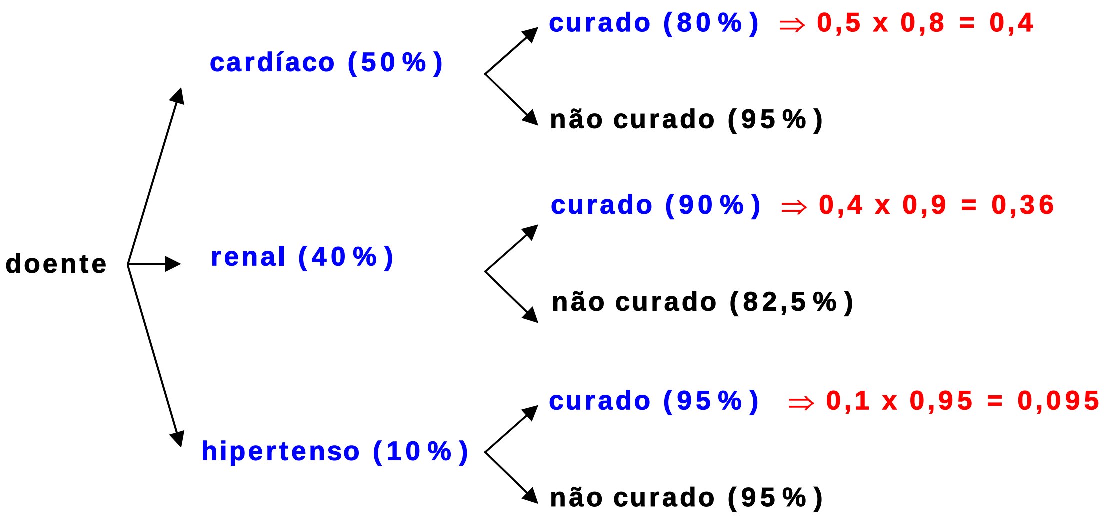
Aí é só aplicar a fórmula da **probabilidade condicional**. Teremos:

→ **P(renal dado curado) = P(renal e curado) / P(curado)**

O numerador **P(renal e curado)** será a probabilidade resultante de um único caminho de probabilidade. Vejamos:



Já no tocante ao denominador **P(curado)**, teremos que **somar** as *probabilidades resultantes* de três caminhos de probabilidades para chegarmos a ele. Teremos:



Ou seja, **P(curado) = 0,4 + 0,36 + 0,095 = 0,855**

Daí, jogando os dados na fórmula da **probabilidade condicional**, teremos que:

→ **P(renal dado curado) = 0,36 / 0,855 = 0,421 = 42,1% → Resposta!**

E aí? Conseguiram fazer as questões? Esperamos que sim!

O importante, sobretudo, é tentar!

Dando continuidade ao estudo da Probabilidade, veremos hoje mais alguns conceitos que não foram comentados na aula passada. Quais sejam:

→ **Probabilidade da união de dois eventos; e**

→ **Probabilidade binomial.**

Aprenderemos igualmente esses tópicos por meio da resolução de exercícios diversos.

 # Probabilidade da União de Dois Eventos:

Esta situação se verificará sempre que a questão de probabilidade trouxer uma pergunta referente a dois eventos, conectados entre si pela partícula **ou**.

Por exemplo, pode ser que a questão apresente uma série de dados e no final pergunte: *Qual a probabilidade de ocorrência do evento A* ***ou*** *do evento B?*

Saberemos, então, de imediato, que a partícula **ou** significará *união*! Trabalharemos, assim, com uma fórmula própria: a da *Probabilidade da União de Dois Eventos*:

P(evento A *ou* evento B)=P(evento A)+P(evento B) – P(evento A *e* evento B)

Reparemos bem na terceira parcela da fórmula acima: **P(evento A *e* evento B)**. Esta parcela trata acerca da probabilidade de ocorrência *simultânea* dos eventos A e B.

Aprendemos na aula passada que, caso os eventos A e B sejam *eventos independentes*, então a probabilidade de ocorrência de A *e* B, ao mesmo tempo, será encontrada pelo *produto* das probabilidades individuais! Lembrados disso?

Pois bem! Vejamos alguns exemplos que nos ajudarão a entender melhor essa teoria.

Exemplo 1) Uma urna contém 10 bolinhas numeradas de 1 a 10. Uma bolinha é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de se observar um múltiplo de 2 ou de 4?

Sol.: Vemos facilmente que esta questão trata de dois eventos, e não apenas de um! Quais são esses dois eventos?

→ Retirar uma bolinha numerada com um múltiplo de dois; e

→ retirar uma bolinha numerada com um múltiplo de quatro.

Na pergunta da questão, esses dois eventos estão conectados entre si pela partícula **ou**, o que nos leva a concluir que estamos trabalhando com a *probabilidade da união de dois eventos*!

Teremos, pois, que:

→ **P(múltiplo de 2 *ou* múltiplo de 4)=P(múltiplo de 2)+P(múltiplo de 4)-P(múltiplo de 2 e múltiplo de 4)**

O que temos a fazer é descobrir o valor de cada uma das parcelas. Vamos lá!

→ **P(múltiplo de 2)=?**

Sabemos que probabilidade é uma fração: Resultados favoráveis / resultados possíveis!

Daí, na hora de retirarmos uma bolinha de uma urna que contém dez delas, quantos serão os resultados possíveis? Serão 10, obviamente! É esse nosso denominador.

Queremos agora que a bolinha retirada seja múltiplo de 2. Quantos são os resultados que satisfazem essa exigência (*resultados favoráveis*)? Ora, são 5. Senão, vejamos:

→ {1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, **10**} ⇒ (cinco múltiplos de 2)!

Daí, teremos:

→ **P(múltiplo de 2)= (5/10)**

Passemos a trabalhar a segunda parcela da equação:

→ **P(múltiplo de 4)=?**

Quantos são os resultados possíveis para a retirada de uma bola, se a urna tem dez bolas? Dez. (É o nosso denominador)!

E quantos são os resultados que satisfazem a exigência de a bola retirada ser múltiplo de 4? Ou seja, quantos são os *resultados favoráveis*? São 2. Vejamos:

→ {1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, **8**, 9, 10} ⇒ (dois múltiplos de 4)!

Daí, teremos que:

→ **P(múltiplo de 4)=(2/10)**

Pois bem! Só nos falta calcular agora a terceira parcela da equação:

→ **P(múltiplo de 2 *e* múltiplo de 4)=?**

Já sabemos que há dez resultados possíveis para a retirada de uma bola dessa urna!

Mas quantos serão os resultados favoráveis? Ou seja, quantos serão os resultados que satisfazem, *ao mesmo tempo*, a exigência de a bola retirada ser um múltiplo de 2 **e** um múltiplo de 4? Essa é fácil. Vejamos:

→ {1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, **8**, 9, 10} ⇒ (são também apenas 2 resultados, ao mesmo tempo, múltiplos de 2 e múltiplos de 4)!

Daí, teremos que:

→ **P(múltiplo de 2 *e* múltiplo de 4)=(2/10)**

Finalmente, lançando todos esses resultados na equação da união de dois eventos, teremos:

→ **P(múltiplo de 2 *ou* múltiplo de 4)=(5/10)+(2/10)–(2/10)**

E:

→ **P(múltiplo de 2 *ou* múltiplo de 4)=(5/10)=0,50= 50% → Resposta!**

Ou seja, não tem segredo! Basta recordar da fórmula e aplicá-la! Mais um exemplo.

Exemplo 2) (ESAF) Um dado "honesto" é lançado juntamente com uma moeda não viciada. Assim, a probabilidade de se obter um número ímpar no dado ou coroa na moeda é:
a) 1/5
b) 1/4
c) 2/4
d) 3/5
e) 3/4

Sol.: Percebemos que aqui também haverá dois eventos envolvidos: o lançamento de um dado e o lançamento de uma moeda. Obviamente que lançar um dado e lançar uma moeda são eventos que não dependem um do outro, ou seja, o resultado de um não influencia em nada o resultado do outro. Em outras palavras, são *eventos independentes*, **embora o enunciado não tenha dito isso expressamente**!

Pois bem! Vamos ao nosso raciocínio.

Trabalhando primeiro com o dado. Quantas possibilidades de resultado há no lançamento de um dado? Ora, há seis possibilidades: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

E quantos modos diferentes há de esse resultado ser um numero ímpar? Vejamos: {**1**, 2, **3**, 4, **5**, 6}. Ora, haverá três possibilidades.

Daí, ao lançarmos um dado, a probabilidade de o resultado ser ímpar será:

$$\textbf{P(resultado ímpar no dado)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Passemos ao caso da moeda! Quantos resultados possíveis há no lançamento de uma moeda "não viciada"? Dois: {cara, coroa}.

Quantos resultados possíveis de "coroa"? Apenas um. Logo, a probabilidade de, ao lançarmos uma moeda, dar coroa é de:

$$\textbf{P(coroa na moeda)} = \frac{1}{2}$$

Quase lá! Quando o enunciado pede que se determine a probabilidade de se obter um número ímpar no dado **ou** coroa na moeda, estará falando, obviamente, da *união* entre esses dois eventos. Já sabemos que a existe uma fórmula própria para esses casos. Teremos:

P(ímpar no dado *ou* coroa na moeda)=P(ímpar dado)+P(coroa moeda)–P(ímpar dado *e* coroa moeda)

Pois bem! As duas primeiras parcelas da equação acima já foram calculadas. Resta-nos a última! Eis o *xis* da questão: esta última parcela há que ser muito bem pensada por nós. Por quê? Porque se estivermos trabalhando com *eventos independentes* – e esse é o nosso caso! – então esta parcela será encontrada pelo *produto* das probabilidades dos dois eventos.

Teremos:

→ **P(ímpar no dado *e* coroa na moeda)=P(ímpar no dado) x P(coroa na moeda)**

Daí, encontraremos que:

→ **P(ímpar no dado *e* coroa na moeda)= (1/2) x (1/2) = (1/4)**

Finalmente, aplicando os resultados obtidos na nossa equação, encontraremos que:

→ **P(ímpar no dado *ou* coroa na moeda)=(1/2)+(1/2)–(1/4)=(3/4) → Resposta!**

 # Probabilidade Binomial:

Este é um tipo de questão de probabilidade que não costuma ser cobrado em prova com muita freqüência, mas que já esteve presente, inclusive em um concurso da Receita Federal.

Vamos tentar aprendê-lo da forma mais simples possível.

Quando diremos que estamos diante de uma questão de *probabilidade binomial*? Quando a situação que se nos apresentar for a seguinte:

1º) Haverá um evento que se repetirá um determinado número de vezes;

2º) Para esse evento específico, só há *dois resultados possíveis*;

3º) Esses dois resultados possíveis do evento são *mutuamente excludentes*, ou seja, ocorrendo um deles, o outro está descartado!

4º) A questão perguntará pela probabilidade de ocorrer um desses resultados um certo número de vezes.

Por meio de alguns exemplos entenderemos mais facilmente. Vejamos:

Exemplo 1) Um casal apaixonado pretende ter cinco filhos. Considerando que não haja gêmeos entre eles, qual a probabilidade de que sejam exatamente duas meninas?

Vamos analisar.

O evento é o nascimento de um filho. Ora, para esse evento só há dois resultados possíveis: ou será menino ou será menina. Além disso, um resultado *exclui* o outro. Observem que o enunciado está desconsiderando a possibilidade de gêmeos. Assim, se for um menino é porque não foi uma menina, e vice-versa. (Resultados excludentes!)

Por fim, o evento se repetirá por cinco vezes, e a questão pergunta pela probabilidade de o resultado *nascer uma menina* se repita por **exatamente** duas vezes.

Como pudemos verificar, esse enunciado traz todas as características de uma questão de *Probabilidade Binomial*. Ficou entendido?

Mais um exemplo.

Exemplo 2) Uma moeda *honesta* será lançada oito vezes. Qual a probabilidade de se verificar exatamente cinco vezes o resultado *cara*?

Analisemos.

O evento é o lançamento de uma moeda. Ele se repetirá por oito vezes.

Os resultados possíveis para esse evento são apenas dois: cara ou coroa. E em se verificando um desses resultados, é porque o outro não ocorreu. Certo? Ou seja, são *resultados excludentes*!

Finalmente, a questão pergunta pela probabilidade de que um evento se verifique por **exatamente** cinco vezes.

Novamente, aqui, estão presentes todas as características de uma questão de *Probabilidade Binomial*.

Agora, sim, passemos a aprender como se resolve este tipo de questão!

O primeiro passo de nossa resolução será, ao identificar qual é o evento que estamos trabalhando, definir quais são os dois resultados possíveis! Daí, observaremos a pergunta da questão!

Trabalhemos com o *exemplo 1* apresentado acima:

Exemplo 1) Um casal apaixonado pretende ter cinco filhos. Considerando que não haja gêmeos entre eles, qual a probabilidade de que sejam exatamente duas meninas?

O evento é o nascimento de um filho. Os dois resultados possíveis são *menino* e *menina*.

Vejamos agora a pergunta da questão: *qual a probabilidade de que sejam exatamente duas meninas?*

Daí, tomaremos esse resultado que consta na pergunta da questão, e passaremos a chamá-lo de *sucesso*! Ou seja, o *sucesso*, neste caso, é o nascimento de uma menina. E quanto ao outro resultado possível, como o chamaremos? *Fracasso*!

Obviamente que essa nomenclatura é meramente técnica! Certo?

Pois bem! Sabendo disso, nosso próximo passo será calcular duas probabilidades: a de ocorrência de um evento *sucesso*, e a de ocorrência de um evento *fracasso*! Faremos:

→ **P(*menina*)=?**

Ora, se vai nascer uma criança, então são dois os resultados possíveis!

Queremos que seja *menina*. Quantos resultados satisfazem essa exigência? Somente um, claro! Daí, teremos:

→ **P(*menina*)=(1/2)**

Com isso, já encontramos a probabilidade do *evento sucesso*!

Resta-nos calcular a probabilidade do *outro* resultado. Teremos:

→ **P(*menino*)=?**

Seguindo o mesmíssimo raciocínio acima, encontramos que:

→ **P(*menino*)=(1/2)**

Até aqui, tudo bem?

Ótimo! Feito isso, aplicaremos agora a **equação da probabilidade binomial**, que é a seguinte:

P(*de "s" eventos sucesso)*=[Combinação $_{N,\,S}$]x [P(sucesso)^S] x [P(fracasso)^F]

Onde:

→ **N** é o número de repetições do evento;

→ **S** é o número de sucessos desejados;

→ **F** é o número de fracassos.

Neste nosso exemplo, teremos o seguinte:

→ O evento vai se repetir por cinco vezes (serão cinco filhos!). Logo: **N=5**

→ O evento *sucesso* é o nascimento de uma *menina*. A questão pede que sejam exatamente duas meninas. Logo: **S=2.**

→ Se serão cinco nascimentos e duas meninas, resta que o número de meninos será a diferença. Ou seja, serão 3 meninos. Lembrando que o *evento sucesso* são as meninas, então o *evento fracasso* serão os meninos. Logo: **F=3.**

Finalmente, aplicando os resultados obtidos para este exemplo na equação da *Probabilidade Binomial*, encontraremos que:

P(*de duas meninas)*=[C $_{5,\,2}$]. [P(*menina*)^2] x [P(*menino*)^3]

Teremos:

→ $C_{5,2} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2x1} = \frac{20}{2} = 10$

Daí:

P(*de duas meninas)*=[C $_{5,\,2}$]. [P(*menina*)^2] x [P(*menino*)^3]

→ **P(*de duas meninas*)=10 x (1/2)^2 x (1/2)^3 =** $10x\frac{1}{4}x\frac{1}{8} = \frac{10}{32} = 0{,}3125$

→ **P(*de duas meninas*)= 31,25% → Resposta!**

Somente isso! Não é fácil? Façamos agora o exemplo 2.

Exemplo 2) Uma moeda *honesta* será lançada oito vezes. Qual a probabilidade de se verificar exatamente cinco vezes o resultado *cara*?

O evento é o lançamento de uma moeda. Será repetido por oito vezes! (Já sabemos, então, que **N=8**). A questão pede *exatamente* cinco resultados "cara".

Logo, "cara" é o *evento sucesso*, e **S=5**.

Conseqüentemente, "coroa" é o *evento fracasso*, e **F=3**.

Certo?

Daí, calcularemos a probabilidade de um *evento sucesso* e a de um *evento fracasso*. Teremos:

→ **P(cara)=(1/2)**

(São dois resultados possíveis, e somente um satisfaz a exigência que seja "cara").

Segundo o mesmo raciocínio, teremos:

→ **P(coroa)=(1/2)**

Finalmente, aplicando a equação da *Probabilidade Binomial*, teremos:

P(*de "s" eventos sucesso*)=[Combinação $_{N,\,S}$]x [P(sucesso)^S] x [P(fracasso)^F]

→ **P(*de 5 caras*)=($C_{8,5}$) x [P(*cara*)^5] x [P(*coroa*)^3]**

Daí: $C_{8,5}=\dfrac{8!}{5!.3!}=\dfrac{8x7x6x5!}{5!.3x2x1}=56$

E: → **P(*de 5 caras*)= 56 x [(1/2)^5] x [(1/2)^3] =** $56x\dfrac{1}{32}x\dfrac{1}{8}=\dfrac{56}{256}$

Chegamos a: → **P(*de 5 caras*) = 0,2187 = 21,87% → Resposta!**

É isso, meus amigos!

Com toda a teoria explicada na aula anterior, e ora complementada, damos por encerrado o estudo da Probabilidade, tal como sói se apresentar nos concursos públicos!

Na seqüência, as questões do nosso *dever de casa* de hoje!

Forte abraço a todos, fiquem com Deus, e até a próxima!

Dever de Casa

01.(MPOG 2001 ESAF) A probabilidade de ocorrer cara no lançamento de uma moeda viciada é igual a 2/3. Se ocorrer cara, seleciona-se aleatoriamente um número X do intervalo $\{X \in \mathbb{N} \mid 1 \le X \le 3\}$; se ocorrer coroa, seleciona-se aleatoriamente um número Y do intervalo $\{Y \in \mathbb{N} \mid 1 \le Y \le 4\}$, onde $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais. Assim, a probabilidade de ocorrer um número par é igual a:

a) 7/18
b) ½
c) 3/7
d) 1/27
e) 2/9

02.(AFCE TCU 99 ESAF) Um dado viciado, cuja probabilidade de se obter um número par é 3/5, é lançado juntamente com uma moeda não viciada. Assim, a probabilidade de se obter um número ímpar no dado ou coroa na moeda é:
a) 1/5
b) 3/10
c) 2/5
d) 3/5
e) 7/10

03.(Anal. Orçamento MARE 99 ESAF) São lançadas 4 moedas distintas e não viciadas. Qual é a probabilidade de resultar exatamente 2 caras e 2 coroas?
a) 25%
b) 37,5%
c) 42%
d) 44,5%
e) 50%

04.(TFC 1995) Um casal pretende ter quatro filhos. A probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas é:
a) 3/8 b) 1/2 c) 6/8 d) 8/6 e) 8/3

05.(AFTN 98 ESAF) Em uma cidade, 10% das pessoas possuem carro importado. Dez pessoas dessa cidade são selecionadas, ao acaso e com reposição. A probabilidade de que exatamente 7 das pessoas selecionadas possuam carro importado é:
a) $(0,1)^7\ (0,9)^3$
b) $(0,1)^3\ (0,9)^7$
c) $120\ (0,1)^7\ (0,9)^3$
d) $120\ (0,1)\ (0,9)^7$
e) $120\ (0,1)^7\ (0,9)$

Gabarito:

01. A **02. E** **03. B** **04. A** **05. C**