AULA QUATORZE: Matrizes & Determinantes (Parte I)

Olá, amigos!

Daremos hoje início ao estudo de Matrizes e Determinantes. Pelo histórico das últimas provas elaboradas pela Esaf, este assunto tem sido exigido amiúde, tanto em certames de nível médio, quanto de nível superior.

Embora seja uma matéria (em tese) já vista por todos no ensino médio (antigo 2º grau), e que, por isso mesmo, possa causar algum tipo de mal-estar, convém sabermos logo que sua exigência em concursos se restringe a certos estilos de questão, muito fáceis de serem trabalhados.

Dito isto, iniciemos a resolução do *dever de casa* passado, para após falarmos em Matrizes. Adiante!

Dever de Casa

01.(AFCE TCU 99 ESAF) Um dado viciado, cuja probabilidade de se obter um número par é 3/5, é lançado juntamente com uma moeda não viciada. Assim, a probabilidade de se obter um número ímpar no dado ou coroa na moeda é:

a) 1/5
b) 3/10
c) 2/5
d) 3/5
e) 7/10

Sol.: Aqui há dois eventos envolvidos: o lançamento de um dado e o lançamento de uma moeda.

Foi dado que a probabilidade de se obter um número par é 3/5. Vamos escrever de maneira mais simplificada: **P(par) = 3/5**.

Ao lançar um dado só podemos obter dois resultados: **par** ou **ímpar**. Daí,

P(par) + P(ímpar) = 1

E: → P(ímpar) **=** 1 – P(par) → P(ímpar) **=** 1 – 3/5 → **P(ímpar) = 2/5**

Passemos ao caso da moeda! Quantos resultados possíveis há no lançamento de uma moeda "não viciada"? Dois: {cara, coroa}.

Quantos resultados possíveis de "coroa"? Apenas um. Logo, a probabilidade de, ao lançarmos uma moeda, dar coroa é de:

$$\textbf{P(coroa)} = \frac{1}{2}$$

Quando o enunciado pede que se determine a probabilidade de se obter um número ímpar no dado **ou** coroa na moeda, estará falando, obviamente, da *união* entre esses dois eventos. Já sabemos que a existe uma fórmula própria para esses casos. Teremos:

P(ímpar *ou* coroa) = P(ímpar) + P(coroa) – P(ímpar *e* coroa)

Nós já dispomos das probabilidades P(ímpar) e P(coroa), mas ainda temos que calcular a probabilidade: **P(ímpar e coroa)**.

Os eventos "ímpar no dado" e "coroa na moeda" são independentes? A questão não afirma nada sobre isso, então podemos fazer a seguinte pergunta para descobrir se eles são independentes: o resultado obtido no lançamento do dado influencia no resultado do lançamento da moeda? Facilmente concluímos que não, podemos jogar um dado e ele pode dar par ou ímpar, mas isto não influencia no resultado cara ou coroa da moeda.

Assim, como são dois eventos independentes, podemos dizer que:

P(ímpar e coroa) = P(ímpar) x P(coroa)

Substituindo essa probabilidade na expressão de probabilidade que devemos calcular, teremos:

P(ímpar ou coroa) = P(ímpar) + P(coroa) – P(ímpar) x P(coroa)

Só precisamos substituir os valores de probabilidades que já dispomos para obter a resposta da questão:

P(ímpar ou coroa) = 2/5 + 1/2 – 2/5 x 1/2

Daí, **P(ímpar ou coroa) = 6/10 – 2/10**

E, **P(ímpar ou coroa) = 4/10 → Resposta!**

02.(Anal. Orçamento MARE 99 ESAF) São lançadas 4 moedas distintas e não viciadas. Qual é a probabilidade de resultar exatamente 2 caras e 2 coroas?
a) 25%
b) 37,5%
c) 42%
d) 44,5%
e) 50%

Sol.:

O evento é o lançamento de uma moeda. Ele se repetirá por quatro vezes.

Os resultados possíveis para esse evento são apenas dois: **cara** ou **coroa**. E são *resultados excludentes*!

Finalmente, a questão pergunta pela probabilidade de que nos quatro lançamentos obtenha-se cara por **exatamente** duas vezes e coroa **exatamente** duas vezes. Não havia necessidade de dizer que o resultado coroa deve ocorrer exatamente duas vezes, pois como já está se dizendo que nos quatro lançamentos ocorre exatamente duas caras é claro que vai ocorrer duas coroas.

Novamente, aqui, estão presentes todas as características de uma questão de *Probabilidade Binomial*.

Vamos encontrar os elementos que lançaremos na fórmula da *Probabilidade Binomial.*

Como são quatro lançamentos, então **N=4**.

A questão pede *exatamente* **dois** resultados "cara", então podemos considerar que "cara" é o *evento sucesso*, e **S=2**.

Conseqüentemente, "coroa" é o *evento fracasso*, e **F=2**.

Certo?

Daí, calcularemos a probabilidade de um *evento sucesso* e a de um *evento fracasso*. Teremos:

→ **P(cara)=(1/2)**

(São dois resultados possíveis, e somente um satisfaz a exigência que seja "cara").

Segundo o mesmo raciocínio, teremos:

→ **P(coroa)=(1/2)**

Finalmente, aplicando a equação da *Probabilidade Binomial*, teremos:

P(*de "s" eventos sucesso*)=[Combinação $_{N,S}$]x [P(sucesso)^S] x [P(fracasso)^F]

→ **P(*de 2 caras*)=($C_{4,2}$) x [P(*cara*)^2] x [P(*coroa*)^2]**

Daí: $C_{4,2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!.2!} = 6$

E: → **P(*de 2 caras*)= 6 x [(1/2)^2] x [(1/2)^2] =** $6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

Chegamos a: → **P(*de 2 caras*) = 3/8 = 37,5% → Resposta!**

03.(TFC 1995) Um casal pretende ter quatro filhos. A probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas é:
a) 3/8 b) 1/2 c) 6/8 d) 8/6 e) 8/3

Sol.:

O evento é o nascimento de uma criança. Ora, para esse evento só há dois resultados possíveis: ou será menino ou será menina. Além disso, um resultado *exclui* o outro. Observem que o enunciado está desconsiderando a possibilidade de gêmeos. Assim, se for um menino é porque não foi uma menina, e vice-versa. (Resultados excludentes!)

Por fim, o evento se repetirá por quatro vezes, e a questão pergunta pela probabilidade de o resultado *nascer um menino* se repita por **exatamente** duas vezes. Obviamente, se nascem exatamente dois meninos entre as quatro crianças, é porque as outras duas crianças são duas meninas.

Como podemos verificar, esse enunciado traz todas as características de uma questão de *Probabilidade Binomial*. Ficou entendido?

Vamos encontrar os elementos que lançaremos na fórmula da *Probabilidade Binomial.*

Como são quatro crianças, então **N=4**.

A questão pede *exatamente* dois meninos, então podemos considerar que “menino” é o *evento sucesso*, e **S=2**.

Conseqüentemente, “menina” é o *evento fracasso*, e **F=2**. Certo?

Pois bem! Sabendo disso, nosso próximo passo será calcular duas probabilidades: a de ocorrência de um evento *sucesso*, e a de ocorrência de um evento *fracasso*! Faremos:

→ **P(*menino*)=?**

Ora, se vai nascer uma criança, então são dois os resultados possíveis!

Queremos que seja *menino*. Quantos resultados satisfazem essa exigência? Somente um, claro! Daí, teremos:

→ **P(*menino*)=(1/2)**

Com isso, já encontramos a probabilidade do *evento sucesso*!

Resta-nos calcular a probabilidade do *outro* resultado. Teremos:

→ **P(*menina*)=?**

Seguindo o mesmíssimo raciocínio acima, encontramos que:

→ **P(*menina*)=(1/2)**

Finalmente, aplicando a equação da *Probabilidade Binomial*, teremos:

P(*de “s” eventos sucesso)*=[Combinação $_{N,S}$]x [P(sucesso)^S] x [P(fracasso)^F]

→ **P(*de 2 meninos*)=($C_{4,2}$) x [P(*menino)*^{2}] x [P(*menina*)^2]**

Daí: $C_{4,2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!.2!} = 6$

E: → **P(*de 2 caras*)= 6 x [(1/2)^2] x [(1/2)^2] =** $6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

Chegamos a: → **P(*de 2 caras*) = 3/8 → Resposta!**

04.(AFTN 98 ESAF) Em uma cidade, 10% das pessoas possuem carro importado. Dez pessoas dessa cidade são selecionadas, ao acaso e com reposição. A probabilidade de que exatamente 7 das pessoas selecionadas possuam carro importado é:

a) $(0,1)^7$ $(0,9)^3$
b) $(0,1)^3$ $(0,9)^7$
c) 120 $(0,1)^7$ $(0,9)^3$
d) 120 (0,1) $(0,9)^7$
e) 120 $(0,1)^7$ (0,9)

Sol.:

O evento é pesquisar se uma pessoa possui um carro importado. Ele se repetirá por dez vezes, pois dez pessoas foram selecionadas.

Os resultados possíveis para esse evento são apenas dois: **"possui carro importado"** ou **"não possui carro importado"**. E como um é a negação do outro, é claro que são *resultados excludentes*!

Finalmente, a questão pergunta pela probabilidade de que **exatamente** 7 das 10 pessoas selecionadas possuam carro importado.

Novamente, aqui, estão presentes todas as características de uma questão de *Probabilidade Binomial*.

Vamos encontrar os elementos que lançaremos na fórmula da *Probabilidade Binomial*!

Como dez pessoas foram selecionadas para ver se tem carro importado, então **N=10**.

A questão pede *exatamente* **sete** resultados "**possui carro importado**", então podemos considerar que "**possui carro importado**" é o *evento sucesso*, e **S=7**.

Conseqüentemente, **"não possui carro importado"** é o *evento fracasso*, e **F=3**.

Certo?

Daí, calcularemos a probabilidade de um *evento sucesso* e a de um *evento fracasso*. Teremos:

→ **P(possui carro importado) = (10%) = 0,10**

Pois, foi informado no enunciado da questão que 10% das pessoas (10 em cada 100 pessoas) possuem carro importado.

Como um evento é a negação do outro, temos a seguinte relação entre eles:

→ **P(não possuir carro importado) + (possuir carro importado) = 1**

Daí, **P(não possuir carro importado) = 1 – 0,10 = 0,90**

Finalmente, aplicando a equação da *Probabilidade Binomial*, teremos:

P(*de "s" eventos sucesso*) = [Combinação $_{N,\,S}$] x [P(sucesso)^S] x [P(fracasso)^F]

→ **P(de *7 importados*) = ($C_{10,7}$) x [P(possui carro importado)^2] x [P(não possui carro importado)^2]**

Daí: $C_{10,7} = \dfrac{10!}{7!.3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!.6} = 120$

E: → **P(de *7 importados*) = 120 x [(0,10)^7] x [(0,90)^3]**

Chegamos a: → **P(de *7 importados*) = 120 (0,1)^7 (0,9)^3 → Resposta!**

05. (MPU 2004.2 ESAF) Maria ganhou de João nove pulseiras, quatro delas de prata e cinco delas de ouro. Maria ganhou de Pedro onze pulseiras, oito delas de prata e três delas de ouro. Maria guarda todas essas pulseiras – e apenas essas – em sua pequena caixa de jóias. Uma noite, arrumando-se apressadamente para ir ao cinema com João, Maria retira, ao acaso, uma pulseira de sua pequena caixa de jóias. Ela vê, então, que retirou uma pulseira de prata. Levando em conta tais informações, a probabilidade de que a pulseira de prata que Maria retirou seja uma das pulseiras que ganhou de João é igual a

a) 1/3.
b) 1/5.
c) 9/20.
d) 4/5.
e) 3/5.

Sol.:
Temos as seguintes informações retiradas do enunciado:

Maria ganhou de João 9 pulseiras: **4 de prata** e **5 de ouro**
Maria ganhou de Pedro 11 pulseiras: **8 de prata** e **3 de ouro**
Total de pulseiras = **20** (sendo 12 de prata e 8 de ouro)

A questão solicita: **Qual é a probabilidade de que a pulseira de prata que Maria retirou seja uma das pulseiras que ganhou de João?**

Mas observe que foi dada uma informação que se deve levar em consideração no cálculo da probabilidade solicitada: **Ela vê, então, que retirou uma pulseira de prata.**

Compondo a probabilidade solicitada com o fato dado, formamos a seguinte pergunta a qual buscaremos a resposta:

Qual é a probabilidade de que a pulseira de prata que Maria retirou seja uma das pulseiras que ganhou de João, dado que ela retirou uma pulseira de prata?

Lembram como se chama essa probabilidade acima? É claro que é a conhecida e bem solicitada ***probabilidade condicional***!

Antes de passarmos para a fórmula da probabilidade condicional, vamos fazer uma notação mais simplificada da probabilidade requerida acima:

P(a pulseira seja uma das que ganhou de João dada que é de prata) = ?

A fórmula da probabilidade condicional é dada por:

P(**A dado B**) = $\dfrac{P(\textbf{A e B})}{P(\textbf{B})}$

Assim teremos que calcular:

$$\frac{\text{P(a pulseira seja uma das que ganhou de João } \textbf{e} \text{ seja de prata)}}{\text{P(seja de prata)}} = ?$$

Passemos ao cálculo das probabilidades que estão no numerador e no denominador!

→ Cálculo da probabilidade do numerador:

Pela definição fundamental de probabilidade (nº de casos favoráveis/nº de casos possíveis) vamos calcular a probabilidade:

$$\text{P(a pulseira seja uma das que ganhou de João } \textbf{e} \text{ seja de prata)} = \frac{\textbf{4} \text{ de prata que João deu}}{\textbf{20} \text{ pulseiras no total}}$$

P(a pulseira seja uma das que ganhou de João **e** seja de prata) = 4/20 = **0,2**

→ Cálculo da probabilidade do denominador:

$$\text{P(seja de prata)} = \frac{\textbf{12} \text{ de prata}}{\textbf{20} \text{ pulseiras no total}} = 12/20 = \mathbf{0,6}$$

Com estes resultados podemos calcular a probabilidade condicional que é pedida na questão.

$$\frac{\text{P(a pulseira seja uma das que ganhou de João } \textbf{e} \text{ seja de prata)}}{\text{P(seja de prata)}} = \frac{0,2}{0,6} = \mathbf{1/3 \text{ (resposta!)}}$$

06. (MPU 2004.2 ESAF) Luís é prisioneiro do temível imperador Ivan. Ivan coloca Luís à frente de três portas e lhe diz: "Atrás de uma destas portas encontra-se uma barra de ouro, atrás de cada uma das outras, um tigre feroz. Eu sei onde cada um deles está. Podes escolher uma porta qualquer. Feita tua escolha, abrirei uma das portas, entre as que não escolheste, atrás da qual sei que se encontra um dos tigres, para que tu mesmo vejas uma das feras. Aí, se quiseres, poderás mudar a tua escolha". Luís, então, escolhe uma porta e o imperador abre uma das portas não-escolhidas por Luís e lhe mostra um tigre. Luís, após ver a fera, e aproveitando-se do que dissera o imperador, muda sua escolha e diz: "Temível imperador, não quero mais a porta que escolhi; quero, entre as duas portas que eu não havia escolhido, aquela que não abriste". A probabilidade de que, agora, nessa nova escolha, Luís tenha escolhido a porta que conduz à barra de ouro é igual a

a) 1/2.
b) 1/3.
c) 2/3.
d) 2/5.
e) 1.

Solução:
Vamos designar as portas por: P1, P2 e P3. E vamos fazer a seguinte consideração:

atrás de P1 tenha a barra de ouro,
atrás de P2 tenha um tigre e
atrás de P3 tenha um tigre.

Há **3 possibilidades** na **1ª escolha** da porta por Luís: **ou P1 ou P2 ou P3**, com probabilidades de escolha de 1/3 para cada porta.

Vamos analisar as situações possíveis:

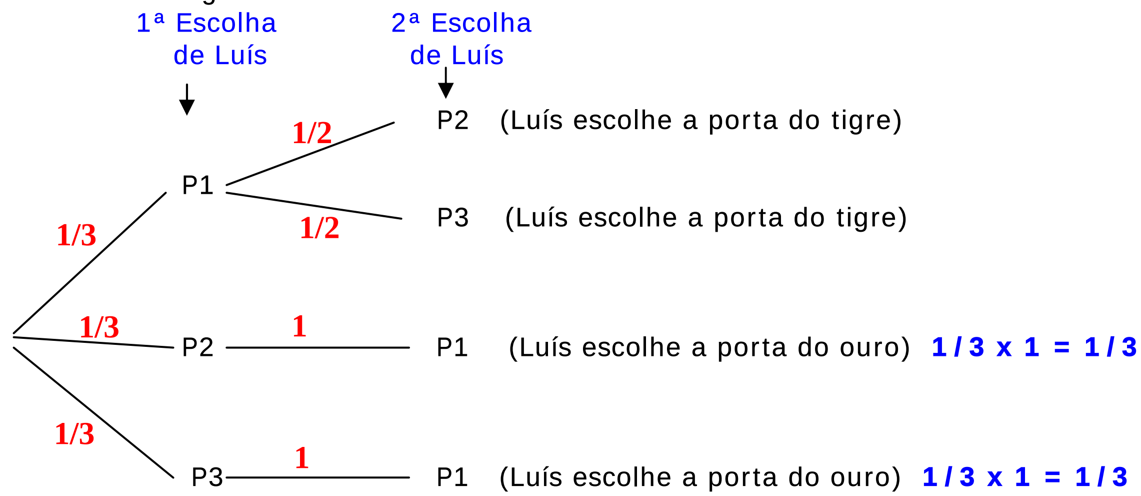
→ Se a primeira escolha for a **porta P1** (a porta do ouro), então o imperador poderá abrir a **porta P2** ou **P3** (ambas do tigre), e assim a segunda escolha de Luís poderá ser ou a porta **P3** ou a porta **P2**. Desta forma, Luís <u>não</u> encontrará o ouro.

→ Se a primeira porta escolhida for a **porta P2** (a porta de um dos tigres), então o imperador abrirá a porta **P3** (a do outro tigre) e assim a segunda escolha de Luís será a porta **P1** (do ouro). Desta forma, Luís encontrará o ouro.

→ Se a primeira porta escolhida for a **porta P3** (a porta de um dos tigres), então o imperador abrirá a porta **P2** (a do outro tigre) e assim a segunda escolha de Luís será a porta **P1** (do ouro). Desta forma, Luís encontrará o ouro.

Pela análise acima, Luís só descobrirá a porta do ouro, se a primeira escolha for a porta do tigre (duas possibilidades em três), ou seja, a probabilidade é de **2/3 (resposta!).**

Para um melhor entendimento da solução da questão, as situações supracitadas estão representadas no diagrama de árvore abaixo:



Daí, a probabilidade de Luís escolher a porta do ouro, com estas duas chances de escolha é:

1/3 + 1/3 = **2/3 (resposta!)**

Agora, sim, falemos sobre Matrizes!

 # Conceito:

Dito da forma mais simples possível, uma Matriz nada mais é que uma *tabela*, que serve para a organização de dados numéricos.

Esta *tabela* será limitada por *colchetes*, dentro dos quais estarão dispostos os valores numéricos. Assim, teremos que são exemplos de Matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

A princípio, precisamos saber que todas as Matrizes têm uma *dimensão*! E esta será definida da seguinte forma:

→ Dimensão da matriz = Número de **linhas** x Número de **colunas**.

Assim, diremos que a matriz do exemplo (a) acima:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ é uma Matriz 3x3 (lê-se *matriz três por três*).

Significa isso que ela tem três linhas e três colunas!

É imprescindível que guardemos essa ordem: **linhas e colunas**. Para efeitos mnemônicos, podemos gravar a palavra **LI-CO**, designando a ordem **li**nha e **co**luna.

Dependendo de qual seja a dimensão de uma matriz, ela poderá receber determinadas nomenclaturas. Alguns nomes dados a certas matrizes são os seguintes:

→ **Matriz Quadrada**: é aquela que tem o mesmo número de linhas e de colunas. Vejamos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ é uma Matriz 3x3, por isso, chamada de **Matriz Quadrada de Ordem 3.**

Ou ainda: **Matriz Quadrada de 3ª Ordem**, ou simplesmente **Matriz de 3ª Ordem**. Já ficará subentendido que estamos falando de uma Matriz Quadrada, formada por três linhas e três colunas.

Outros exemplos de Matrizes Quadradas são os seguintes:

b) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma Matriz Quadrada de 2ª Ordem, ou Matriz de 2ª Ordem.

→ **Matriz Linha**: é aquela, como o próprio nome sugere, formada por apenas uma linha! Vejamos alguns exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ é uma Matriz Linha, de dimensão 1x3, ou seja, tem 1 linha e 3 colunas.

b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$ é uma Matriz Linha, de dimensão 1x2, ou seja, tem uma linha e duas colunas.

→ **Matriz Coluna**: aquela que apresenta uma única coluna. Por exemplo:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ é uma Matriz Coluna, de dimensão 3x1, ou seja, formada por 3 linhas e uma coluna.

→ **Matriz Nula**: aquela cujos elementos são todos iguais a zero! Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma Matriz Nula de 2ª Ordem.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma Matriz Nula de dimensão 2x3, ou seja, duas linhas e três colunas.

 # Ainda Sobre a Matriz Quadrada:

Convém sabermos que toda matriz quadrada tem duas *diagonais*, que serão ditas *diagonal principal* e *diagonal secundária*. Pelos desenhos abaixo, aprenderemos a reconhecer cada uma delas. Vejamos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 5 & 3 \\ 2 & \mathbf{-3} & 1 \\ 1 & 4 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \textbf{Diagonal Principal}$$

$$\textbf{Diagonal Secundária} \longleftarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & \mathbf{3} \\ 2 & \mathbf{-3} & 1 \\ \mathbf{1} & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A diagonal principal, portanto, começa do elemento à esquerda na primeira linha, e vai descendo para o sentido da direita. O inverso ocorre com a diagonal secundária.

É fundamental que tenhamos em mente os nomes dessas duas diagonais. Somente ratificando: só falaremos nelas (nas diagonais) quando estivermos trabalhando com *Matrizes Quadradas*! Certo?

Pois bem! Já estamos prontos para conhecer outros tipos específicos de Matrizes. Vejamos:

→ **Matriz Identidade:** é aquela cujos elementos da *diagonal principal* são todos iguais a 1, e os demais elementos da matriz, iguais a 0 (zero). Vejamos:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ é uma **Matriz Identidade de 2ª Ordem**, designada por $\mathbf{I_2}$.

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ é uma **Matriz Identidade de 3ª Ordem**, designada por $\mathbf{I_3}$.

Mais adiante, quando estudarmos *operações com matrizes*, veremos a importância de se reconhecer uma matriz identidade!

→ **Matriz Diagonal:** é aquela matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são diferentes de zero, e todos os demais elementos são iguais a zero. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

→ **Matriz Triangular:** é aquela matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 (como na matriz identidade), e cujos elementos de um dos *triângulos* criados pela diagonal principal são iguais a zero. Vejamos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma **Matriz Triangular de 2ª Ordem.**

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ é uma **Matriz Triangular de 3ª Ordem.**

 # Elementos da Matriz e *Lei de Formação* de uma Matriz:

Cada elemento de uma matriz *mora* em um endereço certo! Ou seja, cada posição da matriz pode ser designada por um *endereço*. É muito fácil aprender a localizar a posição de um elemento na Matriz.

Por exemplo, se estamos trabalhando com a matriz **A** (em geral, matrizes são chamadas por letras maiúsculas), de dimensão 3x3, seus elementos serão os seguintes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observem que cada elemento (designado por uma letra minúscula) é acompanhado de dois índices (dois números): o primeiro deles indicará a linha a qual pertence o elemento; a segunda, a coluna.

Assim, se temos o elemento $\mathbf{a_{11}}$, este será o que ocupa a primeira linha e a primeira coluna da matriz. Por sua vez, o elemento $\mathbf{a_{32}}$ será aquele que ocupa a terceira linha e a segunda coluna da matriz. Ficou entendido? Nada mais fácil.

Precisaremos conhecer essa nomenclatura para acertarmos um tipo de questão muito freqüente em provas de raciocínio lógico. Ora, muitas vezes as questões já trazem as matrizes prontas, com seus respectivos valores numéricos. Outras vezes, a questão apresenta apenas uma *lei de formação* da matriz. Neste caso, cabe a nós *construirmos* a matriz, obedecendo àquela lei.

Como é isso? Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1) Se a questão trouxer, em seu enunciado, a matriz quadrada de 3ª ordem

$$\mathbf{X = x_{i,j}\ ,\ tal\ que\ x_{i,j} = (i+j)^2}$$

O que significa isso? Significa que teremos que calcular elemento por elemento ($\mathbf{x_{i,j}}$) da matriz **X**, sempre obedecendo essa relação apresentada.

Ora, se a questão disse que se trata de uma matriz quadrada de 3ª ordem, seus elementos serão os seguintes:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Observem que os índices **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna do elemento que estará sendo calculado. Assim, teremos que:

→ $\mathbf{x_{11}} = (1+1)^2 = 2^2 = \mathbf{4}$

→ $\mathbf{x_{12}} = (1+2)^2 = 3^2 = \mathbf{9}$

→ $\mathbf{x_{13}} = (1+3)^2 = 4^2 = \mathbf{16}$

→ $\mathbf{x_{21}} = (2+1)^2 = 3^2 = \mathbf{9}$

→ $\mathbf{x_{22}} = (2+2)^2 = 4^2 = \mathbf{16}$

→ $\mathbf{x_{23}} = (2+3)^2 = 5^2 = \mathbf{25}$

→ $\mathbf{x_{31}} = (3+1)^2 = 4^2 = \mathbf{16}$

→ $\mathbf{x_{32}} = (3+2)^2 = 5^2 = \mathbf{25}$

→ $\mathbf{x_{33}} = (3+3)^2 = 6^2 = \mathbf{36}$

E agora sim, acabamos de compor nossa matriz **X**, que é a seguinte:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{pmatrix}$$

De posse dessa matriz, podemos fazer com ela tudo o que a questão vier a solicitar. Somá-la com outra, multiplicá-la por outra (ou por uma constante), encontrar sua *matriz transposta*, e mais uma porção de outras coisas. Só não sairíamos do canto, se não soubéssemos construí-la.

Exemplo 2) Construir a matriz quadrada de 2ª ordem $\mathbf{Y = y_{i,j}\ ,\ tal\ que\ y_{i,j} = (i)^j}$.

Sendo uma matriz de 2ª ordem, seus elementos serão os seguintes:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

Obedecendo à lei de construção desta matriz, teremos:

→ $y_{11} = (1)^1 = \mathbf{1}$

→ $y_{12} = (1)^2 = \mathbf{1}$

→ $y_{21} = (2)^1 = \mathbf{2}$

→ $y_{22} = (2)^2 = \mathbf{4}$

Teremos, pois, que a matriz **Y** será a seguinte: $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

 # Operações com Matrizes:

Aprenderemos agora alguns tipos de operações que podem ser realizadas entre duas ou mais matrizes.

→ Igualdade de Matrizes:

Duas matrizes serão ditas iguais quando apresentarem todos os elementos correspondentes iguais.

Exemplo 1)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Se duas matrizes são ditas iguais, então iguais são os seus elementos correspondentes!

Só isso e mais nada!

→ Adição de Matrizes:

Trata-se da operação mais fácil. A primeira coisa a ser dita é a seguinte: só é possível somar matrizes de mesma dimensão! E mais: o resultado da soma entre matrizes será sempre uma outra matriz, de mesma dimensão daquelas que foram somadas!

Com isso, já matamos a seguinte charada: suponhamos que um enunciado diga que, ao somarmos as matrizes **A** e **B**, tal soma resultará numa matriz **Z**, de 2ª ordem. Ora, com isso, saberemos imediatamente que as matrizes **A** e **B** são também matrizes quadradas de 2ª ordem! E vejam que isso não foi dito expressamente pela questão! Essa informação estava nas *entrelinhas*! Entendido?

Para somarmos duas matrizes, só teremos que somar os elementos que estejam nas posições correspondentes! Vejamos um exemplo:

Sejam as matrizes **A** e **B**, tais que:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \quad \text{e } B = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Qual será a Matriz **S** resultante da soma **A+B?**

Teremos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

As cores servem para ajudar. Vejam: o elemento que ocupa a posição 11 (primeira linha e primeira coluna) na matriz **A** será somado exatamente ao elemento correspondente da matriz **B**. E assim por diante! O resultado da soma ocupará a mesma posição dos elementos somados. Ou seja:

→ $s_{11} = a_{11} + b_{11}$

→ $s_{12} = a_{12} + b_{12}$

→ $s_{21} = a_{21} + b_{21}$

→ $s_{22} = a_{22} + b_{22}$

Enfim, não há segredo algum na soma de matrizes! Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 1) Somar as matrizes A e B:

$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Teremos:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5+7) & (3-6) \\ (-8+4) & (-2-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2) Somar as matrizes A e B:

$A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \end{pmatrix}$

Teremos:

$$\begin{pmatrix} -9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \end{pmatrix} = [-5 \quad -3]$$

Pois bem! Só com o que aprendemos até aqui, já temos condições de resolver algumas questões de provas recentes de Raciocínio Lógico, elaboradas pela Esaf. Senão, vejamos!

 # Exercícios Resolvidos:

01.(AFC-SFC 2001) A matriz $S = s_{ij}$, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma das matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Sabendo-se que $\mathbf{a_{ij} = i^2 + j^2}$ e que $\mathbf{b_{ij} = 2ij}$, então: a soma dos elementos s_{31} e s_{13} é igual a:

a) 12
b) 14
c) 16
d) 24
e) 32

Sol.:

Comecemos pela seguinte análise: o enunciado diz que a matriz **S** é a que resulta da soma de duas outras matrizes, e que se trata de uma matriz quadrada de terceira ordem. Daí, concluiremos que as duas matrizes que estão sendo somadas são igualmente matrizes quadradas de terceira ordem!

Ora, a questão não nos deu as matrizes A e B já construídas. Em vez disso, forneceu-nos as respectivas *leis de formação* de uma e de outra. Teríamos, pois, a princípio, ter que construir estas duas matrizes, para depois somá-las.

Ocorre que, numa leitura mais atenta do enunciado, percebemos que a resposta procurada diz respeito apenas a dois elementos da matriz soma, quais sejam, $\mathbf{s_{31}}$ e $\mathbf{s_{13}}$. Assim, nem será necessário construir toda a matriz **A** ou toda a matriz **B**. Claro que não!

Apenas nos lembraremos que:

→ $S_{13} = A_{13} + B_{13}$ e → $S_{31} = A_{31} + B_{31}$

Daí, encontraremos os elementos correspondentes às posições 13 e 31 nas duas matrizes que estão sendo somadas. Teremos:

→ $A_{13} = (1)^2+(3)^2$ → $A_{13} = 1 + 9$ → $A_{13} = 10$

→ $A_{31} = (3)^2+(1)^2$ → $A_{31} = 9 + 1$ → $A_{31} = 10$

→ $B_{13} = 2x1x3 = 6$

→ $B_{31} = 2x3x1 = 6$

Com isso, chegaremos a:

→ $S_{13} = A_{13} + B_{13}$ → $S_{13} = 10 + 6$ → $S_{13}=16$ e

→ $S_{31} = A_{31} + B_{31}$ → $S_{31} = 10 + 6$ → $S_{31}=16$

Finalmente, chegaremos ao que nos pede a questão, da seguinte forma:

→ $S_{13} + S_{31} = 16 + 16 = 32$ → **Resposta!**

02. (Técnico MPU Administrativa 2004 ESAF) A matriz S = s_{ij}, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma das matrizes A = (a_{ij}) e B=(b_{ij}). Sabendo-se que $\mathbf{(a_{ij}) = i^2 + j^2}$ e que $\mathbf{b_{ij} = i^j}$, então a razão entre os elementos s_{22} e s_{12} determinante da matriz S é igual a

a) 1.
b) 3.
c) 4.
d) 2.
e) 6.

Sol.:

Observem que esta questão foi de 2004, enquanto a anterior foi de 2001. Mas são praticamente iguais! Quase nenhuma diferença entre as duas!

Seguindo, pois, idêntico raciocínio, teremos que:

→ $S_{12} = A_{12} + B_{12}$ e → $S_{22} = A_{22} + B_{22}$

Daí, encontraremos os elementos correspondentes às posições 13 e 31 nas duas matrizes que estão sendo somadas. Teremos:

→ $A_{12} = (1)^2+(2)^2$ → $A_{12} = 1 + 4$ → $A_{12} = 5$

→ $A_{22} = (2)^2+(2)^2$ → $A_{22} = 4 + 4$ → $A_{22} = 8$

→ $B_{12} = 1^2 = 1$

→ $B_{22} = 2^2 = 4$

Com isso, chegaremos a:

→ $S_{12} = A_{12} + B_{12}$ → $S_{12} = 5 + 1$ → $S_{12} = 6$ e

→ $S_{22} = A_{22} + B_{22}$ → $S_{22} = 8 + 4$ → $S_{22} = 12$

Finalmente, chegaremos ao que nos pede a questão, da seguinte forma:

→ $S_{22} / S_{12} = 12 / 6 = 2$ → **Resposta!**

→ Produto de uma Constante por uma Matriz:

Este tipo de operação também não tem nenhum segredo. Apenas multiplicaremos a constante por cada um dos elementos da matriz. E chegaremos à matriz resultante!

Vejamos um exemplo:

$$3 \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Compreendido? Fácil, não? Facílimo!

→ Produto entre Matrizes:

Aqui se costuma fazer alguma confusão! Embora seja igualmente muito fácil se multiplicar duas matrizes. Vamos aprender com calma.

Antes de qualquer coisa, convém sabermos que há uma exigência para que se possa multiplicar duas matrizes. Ou seja, não são quaisquer duas matrizes que podem ser multiplicadas! Para que seja possível se efetuar o produto de duas matrizes, é preciso que se verifique o seguinte: **que o número de linhas da primeira matriz seja igual ao número de colunas da segunda matriz.**

Se essa exigência se verificar, então o produto é possível. Caso contrário, nada feito!

Outra coisa importante: ao se multiplicar duas matrizes, qual será a dimensão da matriz resultante? Aprenderemos da seguinte forma: suponhamos que pretendemos multiplicar a matriz **A**, de dimensão **3x2**, com a matriz **B**, de dimensão **2x5.**

Teremos, então, que analisar os valores das dimensões das duas matrizes, da seguinte forma:

$$(A_{3x2}) \ \mathrm{x} \ (B_{2x5})$$

$$(3\mathrm{x}2) \ \mathrm{x} \ (2\mathrm{x}5)$$

“meios”

“extremos”

Funciona assim: para que o produto de duas matrizes seja possível, compararemos as dimensões dos “meios”. Se forem iguais, então diremos que é possível, sim, realizar esse produto! Se os meios, ao contrário, fossem diferentes, já nem poderíamos multiplicar as matrizes!

Uma vez constatado que o produto é possível, verificaremos os “extremos”: e aí nós temos qual será a dimensão da matriz produto!

Neste nosso exemplo acima, teremos que a matriz resultante do produto entre **A** e **B** será uma matriz de dimensão **3x5**.

Compreendido? Reprisando: os "meios" dizem se é possível o produto; os "extremos" dizem a dimensão da matriz resultado do produto.

Pois bem! Precisamos agora aprender como se faz essa multiplicação. Tomemos o exemplo seguinte:

Exemplo 1) Multipliquemos (se possível) as duas matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Sol.:

O *se possível* do enunciado serve para lembrarmos de que nem sempre poderemos multiplicar duas matrizes. É preciso que se verifique uma exigência, já nossa conhecida. Daí, começaremos fazendo justamente isso: averiguando a possibilidade do produto, e qual seria a dimensão da matriz resultante. Teremos:

$$(A_{3x2}) \text{ x } (B_{2x3})$$

$$(3x2) \text{ x } (2x3)$$

"meios"

"extremos"

Conclusão: o produto é possível, e a matriz resultante terá dimensão 3x3.

Ou seja, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P11 & P12 & P13 \\ P21 & P22 & P23 \\ P31 & P32 & P33 \end{pmatrix}$$

Usamos as designações dos elementos da matriz produto todas em letras maiúsculas, para podermos enxergar melhor!

Os índices desses elementos da matriz produto terão uma interpretação especial. Temos que saber o seguinte: para achar um elemento da matriz produto, estaremos sempre multiplicando **uma linha da primeira matriz** por **uma coluna da segunda matriz**.

Sempre assim!

Daí, na hora de calcular o valor do elemento **P11**, faremos o produto entre os elementos da 1ª linha da 1ª matriz, com os elementos da 1ª coluna da 2ª matriz. Ou seja, os índices desse elemento **P11** (da matriz produto) significam o seguinte:

$$P_{11}$$

1ª linha da 1ª matriz ← → **1ª coluna da 2ª matriz**

Assim, na hora de calcular o elemento **P11**, faremos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P11=(2x1)+(1x3)=2+3=5$$

Observem que, na hora de fazer esse produto, multiplicamos o **(**1º elemento da linha pelo 1º elemento da coluna**)**, e somamos com o produto do **(**2º elemento da linha pelo 2º elemento da coluna**).**

Vamos adiante, para fixarmos melhor esse procedimento do produto de matrizes. Encontremos agora o elemento **P12**. Faremos:

$$P_{12}$$

1ª linha da 1ª matriz ← → **2ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P12=(2x2)+(1x1)=4+1=5$$

Calculemos agora o **P13**. Teremos:

$$P_{13}$$

1ª linha da 1ª matriz ← → **3ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P13=(2x3)+(1x2)=6+2=8$$

Calculemos o **P21**. Teremos:

$$P_{21}$$

2ª linha da 1ª matriz ← → **1ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P21=(3x1)+(2x3)=3+6=9}$$

Calculemos o **P22**. Teremos:

$$P_{22}$$

2ª linha da 1ª matriz **2ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P21=(3x2)+(2x1)=6+2=8}$$

Calculemos o **P23**. Teremos:

$$P_{23}$$

2ª linha da 1ª matriz **3ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P21=(3x3)+(2x2)=9+4=13}$$

Calculemos o **P31**. Teremos:

$$P_{31}$$

3ª linha da 1ª matriz **1ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P21=(5x1)+(4x3)=5+12=17}$$

Calculemos o **P32**. Teremos:

$$P_{32}$$

3ª linha da 1ª matriz ← → **2ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ → **P21=(5x2)+(4x1)=10+4=14**

Calculemos, finalmente, o **P33**. Teremos:

$$P_{33}$$

3ª linha da 1ª matriz ← → **3ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ → **P21=(5x3)+(4x2)=15+8=23**

Com isso, chegamos ao nosso resultado final, ou seja, à matriz produto **P**, que é a seguinte:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 13 \\ 17 & 14 & 23 \end{bmatrix}$$

Pois bem! Será sempre esse o caminho utilizado para se fazer o produto de duas matrizes! Com um pouquinho de calma e atenção, logo estará assimilado.

Agora que já sabemos multiplicar matrizes, vejamos o que ocorre se uma das matrizes que estiverem sendo multiplicadas for a **matriz identidade**. Façamos um exemplo:

Exemplo) Multiplique as matrizes A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **e B=** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$**.**

Sol.:

Observem que o enunciado não diz expressamente que a matriz B é a a matriz identidade de 2ª ordem! Isso você já tem que saber! Daí, o primeiro passo será averiguar se é mesmo possível fazer esse produto e, em caso afirmativo, qual será a dimensão da matriz produto. Faremos:

$$(A_{2x2}) \quad x \quad (B_{2x2})$$

$$(2x2) \quad x \quad (2x2)$$

"meios"

"extremos"

Conclusão: o produto é possível, e a matriz resultante terá dimensão 2x2.

Passemos, agora, ao cálculo de cada elemento da matriz **P** (**P**roduto). Teremos:

$$P_{11}$$

1ª linha da 1ª matriz | **1ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

→ **P11=(1x1)+(2x0)=1+0=1**

$$P_{12}$$

1ª linha da 1ª matriz | **2ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

→ **P12=(1x0)+(2x1)=0+2=2**

$$P_{21}$$

2ª linha da 1ª matriz | **1ª coluna da 2ª matriz**

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

→ **P21=(3x1)+(4x0)=3+0=3**

$$P_{22}$$

2ª **linha** da 1ª **matriz** ← → 2ª **coluna** da 2ª **matriz**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \rightarrow P22=(3x0)+(4x1)=0+4=4$$

E chegamos finalmente ao seguinte: $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Ora, se observarmos bem, veremos que a matriz produto **P** é exatamente igual à matriz **A**. Não foi coincidência! Com esse exemplo, concluiremos que **sempre que multiplicarmos uma matriz A qualquer pela matriz identidade, o resultado será a própria matriz A.**

Essa informação pode ser útil na hora de resolver alguma questão de prova, como veremos daqui a pouco!

 # Matriz Transposta:

Trata-se de um conceito muito visado pelas elaboradoras! E também um conceito muito simples. Se temos uma matriz **A** qualquer, diremos que a *matriz transposta de A*, designada por A^t, será aquela que resultar de uma *transposição* entre linhas e colunas da matriz original.

Dito de uma forma mais fácil: para chegarmos à *matriz transposta*, tomaremos a matriz original e, nesta última, **quem é linha vai virar coluna**! Só isso!

Vejamos por meio de alguns exemplos:

Exemplo) Encontre a matriz transposta da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Sol.:

Muito simples! Quem é a primeira linha da matriz A? Vejamos: $A=\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix}$

Pois bem! Vai virar primeira coluna da transposta! Teremos:

$\rightarrow A^t = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \quad \end{bmatrix}$

Agora, quem é a segunda linha da matriz A? Vejamos: $A=\begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix}$

Vai virar segunda coluna da matriz transposta! Teremos:

$\rightarrow A^t = \begin{bmatrix} \quad & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$

Enfim, é apenas isso: **na matriz transposta, quem era linha virou coluna**! E só! Vejamos:

→ → Se $A=\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix}$, então, a matriz $A^t = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} \end{bmatrix}$

Passemos a mais uma questão de prova, que reúne alguns dos conceitos já aprendidos até aqui.

 # Questão Resolvida:

(ESAF/AFTN/98) - Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3/5 & -7/8 \\ 4/7 & 25/4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3/7 & -29/4 \end{bmatrix}$$

e seja x a soma dos elementos da segunda coluna da matriz transposta de Y. Se a matriz Y é dada por Y = (AB) + C, então o valor de x é:

a) - 7/8
b) 4/7
c) 0
d) 1
e) 2

Sol.:

Essa caiu no Fiscal da Receita de 1998. Não é questão difícil. Vejamos.

O enunciado pede alguma coisa relacionada com elementos de uma matriz **Y**, e afirma que essa matriz **Y** é dada por **Y=(A.B)+C**.

Ora, seria bem trabalhoso termos que fazer o produto entre as matrizes **A** e **B**, não fosse pelo fato de a matriz **A** ser a própria *matriz identidade*! Todos viram isso?"

Claro! E assim sendo, já sabemos que esse produto é desnecessário, pois acabamos de aprender que o resultado dessa multiplicação será a própria matriz **B**.

Daí, concluímos que: **Y=B+C**.

Precisamos agora somar essas matrizes **B** e **C**. E isso é facílimo. Teremos:

$$Y = \begin{bmatrix} 3/5 & -7/8 \\ 4/7 & 25/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3/7 & -29/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -7/8 \\ 7/7 & -4/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -7/8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pois bem! Dispondo agora da matriz **Y**, precisamos encontrar a sua *transposta*. Teremos:

→ $Y^t = \begin{bmatrix} 3/5 & 1 \\ -7/8 & -1 \end{bmatrix}$

Finalmente, pede o enunciado que somemos os elementos da segunda coluna dessa matriz transposta que acabamos de encontrar. Teremos:

→ $Y^t = \begin{bmatrix} 3/5 & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}} \\ -7/8 & \end{bmatrix}$ → 1+(-1) = **0** → **Resposta!**

Restam ainda alguns conceitos de matrizes, os quais devemos conhecer para concluir nosso estudo. Todavia, para chegarmos a estudá-los, convém antes falarmos acerca dos *Determinantes*!

Determinantes:

Um *determinante* é, por assim dizer, como um *resultado* de uma matriz quadrada!

Observem que só há que se falar em *determinante* se estivermos trabalhando com uma matriz quadrada!

Precisamos, pois, conhecer os métodos para cálculo dos determinantes. Faremos isso, progredindo com as respectivas dimensões das matrizes quadradas.

→ Determinante de uma Matriz Quadrada de 1ª Ordem:

Se a matriz é quadrada de 1ª ordem, significa que ela tem apenas uma linha e uma coluna. Trata-se de uma matriz de dimensão 1x1. Ora, em tal matriz só há um único elemento!

E seu determinante será o próprio elemento que compõe a matriz!

Assim, teremos:

→Se **A=[2]**, então **det A=2**

→Se **B=[-5]**, então **det B=-5**

→ Determinante de uma Matriz Quadrada de 2ª Ordem:

Será calculado em dois passos. No primeiro passo, multiplicaremos os elementos da diagonal principal e os elementos da diagonal secundária. No segundo, subtrairemos esses resultados do primeiro passo: (produto da diagonal principal *menos* produto da diagonal secundária). É realmente muito fácil. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo) Calcule o determinante da matriz A=$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Sol.:

Reconhecendo as diagonais e fazendo o produto de seus elementos, teremos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diag. Principal: 3x2=6

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diag. Secundária: 3x1=3

Daí, teremos que: **det A = (6) – (3) = 3**

Exemplo) Calcule o determinante da matriz B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$**.**

Sol.:

Faremos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(2x3)=6 **(1x4)=4**

Daí, teremos que: **det B = 4 – 6 = -2**

Exemplo) Calcule o determinante da matriz C= $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$**.**

Sol.:

Faremos: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

(-3x4)=-12 **(1x-5)=-5**

Daí, teremos que:**det C=-5–(-12)=-5+12=7**

→ **Determinante de uma Matriz Quadrada de 3ª Ordem:**

Há vários métodos que podem ser utilizados neste caso. Apresentaremos um que nos parece o mais simples. Seguiremos os passos abaixo, mostrados nos exemplos abaixo. Vejamos:

Exemplo) Calcular o determinante da matriz A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Sol.:

→ 1º Passo) Tomaremos os elementos *extremos* da primeira linha e os projetaremos para baixo, colocando-os numa quarta linha *fictícia*. Da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & \boxed{2} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad & \quad & 2 \end{matrix} \end{array}$$

→ 2º Passo) Faremos o mesmo com os elementos *extremos* da terceira linha, só que projetando-os para cima, para uma *fictícia* nova primeira linha! Assim:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad & \quad & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad & \quad & 2 \end{matrix} \end{array}$$

Com esses dois passos iniciais, é como se passássemos agora a trabalhar com uma matriz de cinco linhas (embora a primeira nova linha e a última nova linha sejam *incompletas*)! Vejamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

Pois bem! Com isso, olhando atentamente, seremos capazes de identificar **três diagonais**, no mesmo sentido da *diagonal principal*. Vejamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

→ 3º Passo) Calcularemos os produtos dos elementos de cada uma das três diagonais identificadas acima, e somaremos esses resultados. Teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

$1x3x1=3$

$1x2x2=4$

$2x1x2=4$

Soma = 11

→ 4º Passo) Identificaremos agora as três diagonais, só que no sentido da *diagonal secundária*. Daí, uma vez identificadas, encontraremos os produtos de cada uma delas, e os somaremos.

Assim, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

2x3x2=12

2x2x1=4

1x1x1=1

Soma = 17

→ 5º Passo) Fazer a diferença entre os resultados encontrados no dois passos anteriores, ou seja, a diferença entre as *diagonais principais* e as *diagonais secundárias*. Teremos:

det A = 11 – 17 = -6

Percebamos que, a cada vez que aumenta a dimensão da matriz quadrada, piora o cálculo do determinante. Assim, parece-nos realmente inviável, na hora de uma prova, que seja exigido o cálculo de um determinante de uma matriz de 4ª ordem!

Todavia, há algo importante que precisamos saber. Vejamos:

 # IMPORTANTE: Se estivermos trabalhando com uma **matriz diagonal** ou com uma **matriz triangular**, o seu determinante será calculado como o produto dos elementos da diagonal principal.

Esses conceitos – *matriz diagonal* e *matriz triangular* – foram vistos mais no início desta aula de hoje. Quem estiver meio esquecido, é só dar uma conferida! Vejamos alguns exemplos:

→ **det** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **= 2 x 3 = 6**

→ **det** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **=1x2x3=6**

→ **det** $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **= 2 x 3 = 6**

→ **det** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ **=1x2x3=6**

Com essa informação, somos capazes de resolver a seguinte questão, cobrada muito recentemente em concurso elaborado pela Esaf.

Vejamos:

(Técnico MPU/2004-2) O determinante da matriz X= $\begin{bmatrix} 2 & 2 & b & 0 \\ 0 & -a & a & -a \\ 0 & 0 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$**, onde *a* e *b* são inteiros positivos tais que a>1 e b>1, é:**

a) -60a
b) 0
c) 60a
d) 20ba^2
e) a(b-60)

Sol.:

Ora, tudo o que precisávamos era ter percebido que essa matriz X fornecida pelo enunciado é uma *matriz triangular*. Vejamos novamente:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & b & 0 \\ 0 & -a & a & -a \\ 0 & 0 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Com isso, teremos que o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos de sua *diagonal principal*.

Ou seja:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & b & 0 \\ 0 & -a & a & -a \\ 0 & 0 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

→ det X = 2x(-a)x5x6 = -60a → Resposta!

Resolução em um minuto ou menos!

Três conceitos de matrizes ainda restam ser estudados por nós: matriz dos cofatores, matriz adjunta e matriz inversa! Temos também algumas propriedades de determinantes para comentar. Mas esses tópicos faltantes ficarão mesmo para a próxima aula.

Por hoje, já aprendemos (ou relembramos) muita coisa!

Seguem as questões do *Dever de Casa*. É importante, como sempre frisamos, que vocês façam o possível para tentar resolver essas questões!

Um forte abraço a todos! E fiquem com Deus!

Dever de Casa

01. (TFC-97) Se A, B e C são matrizes de ordens respectivamente iguais a (2x3), (3x4) e (4x2), então a expressão $[A \cdot (B \cdot C)]^2$ tem ordem igual a:
a) 2 x 2
b) 3 x 3
c) 4 x 4
d) 6 x 6
e) 12 x 12

02. (TFC 1995) Dada as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ e $X=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$, assinale os valores de a e b, de modo que AX=B
a) a=0 e b=1
b) a=1 e b=0
c) a=0 e b=0
d) a=1 e b=1
e) a=0 e b=-1

03. (AFC/CGU 2003/2004) Genericamente, qualquer elemento de uma matriz M pode ser representado por m_{ij}, onde "i" representa a linha e "j" a coluna em que esse elemento se localiza. Uma matriz X = x_{ij}, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma das matrizes A = (a_{ij}) e B=(b_{ij}). Sabendo-se que $a_{ij} = i^2$ e que $b_{ij} = (i-j)^2$, então o produto dos elementos x_{31} e x_{13} é igual a:
a) 16
b) 18
c) 26
d) 65
e) 169

04. (Técnico MPU Administrativa 2004 ESAF) Sejam as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\\ 3 & 3\end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

e seja x_{ij} o elemento genérico de uma matriz X tal que X =$(A.B)^t$, isto é, a matriz X é a matriz transposta do produto entre as matrizes A e B. Assim, a razão entre x_{31} e x_{12} é igual a
a) 2.
b) 1/2.
c) 3.
d) 1/3.
e) 1.

05. (SERPRO 1997) Uma matriz quadrada A, de terceira ordem, possui determinante igual a 5. O determinante da matriz 2A é igual a:
a) 5
b) 10
c) 20
d) 40
e) 80

06. (MPOG 2002) A transposta de uma matriz qualquer é aquela que se obtém trocando linhas por colunas. Sabendo-se que uma matriz quadrada de segunda ordem possui determinante igual a 2, então o determinante do dobro de sua matriz transposta é igual a:

a) –2
b) –1/2
c) 4
d) 8
e) 10

07. (AFC-STN-2000) Uma matriz quadrada X de terceira ordem possui determinante igual a 3. Sabendo-se que a matriz Z é a transposta da matriz X, então a matriz Y = 3Z tem determinante igual a

a) 1/3
b) 3
c) 9
d) 27
e) 81