AULA QUINZE: Matrizes & Determinantes (Parte II)

Olá, amigos!

Pedimos desculpas por não ter sido possível apresentarmos esta aula 15 na semana passada. Motivos de força maior nos impediram de fazê-lo, mas ei-nos aqui, para encerramos o assunto iniciado na aula passada – Matrizes.

Esperamos que todos tenham aprendido bem o assunto e que tenham resolvidos as questões que ficaram do *dever de casa* passado. Caso alguém tenha encontrado alguma dificuldade, é só dar uma conferida nas respectivas resoluções, apresentadas na seqüência. Vamos a elas!

Dever de Casa

01.(TFC-97) Se A, B e C são matrizes de ordens respectivamente iguais a (2x3), (3x4) e (4x2), então a expressão [A . (B . C)]^2 tem ordem igual a:
a) 2 x 2
b) 3 x 3
c) 4 x 4
d) 6 x 6
e) 12 x 12

Sol.:

Uma questão que trata unicamente acerca da ordem (dimensão) das matrizes. E isso já aprendemos perfeitamente. Vamos, portanto, substituir a letra da matriz pela sua dimensão, conforme nos forneceu o enunciado. Ok?

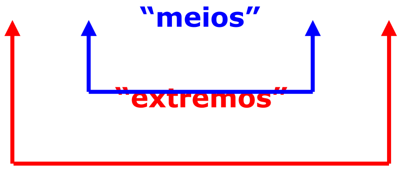
Teremos:

→ $[A. (B . C)]^2 = \{(2x3).[(3x4).(4x2)]^2\}$

Primeiramente devemos fazer o produto das matrizes B e C, que estão dentro do parêntese! Teremos:

(B_{3x4}) x (C_{4x2})

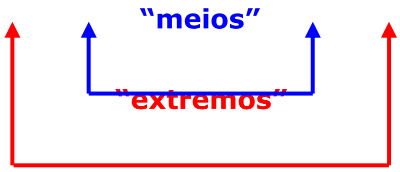
(3 x 4) x (4 x 2)



O resultado, conforme podemos ver no esquema acima, será uma nova matriz de dimensão **(3x2)**, que são os *extremos* das dimensões das matrizes multiplicadas!

Pois bem! Teremos agora é multiplicar a matriz A, de dimensão (2x3) pela matriz produto que acabamos de encontrar, de dimensão (3x2). Teremos:

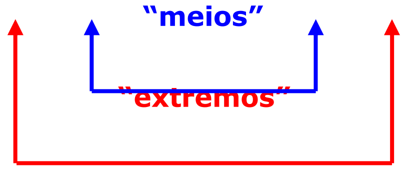
(2 x 3) x (3 x 2)



Daí, chegamos a uma nova matriz, de dimensão **(2x2)**, conforme percebemos pelo esquema acima. Esse é o resultado final do produto [A . (B . C)].

Só que a questão quer mais! Quer que elevemos esse resultado ao quadrado! Viram? É preciso, finalmente, que nós multipliquemos essa matriz resultante por ela mesma. Teremos, pois, que:

(2 x 2) x (2 x 2)



Ou seja, o resultado final da expressão trazida pelo enunciado é justamente uma matriz quadrada de 2ª ordem: uma matriz de dimensão **(2x2) → Resposta!**

02.(TFC 1995) Dada as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **,** $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ **e** $X=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$**, assinale os valores de a e b, de modo que AX=B**

a) a=0 e b=1
b) a=1 e b=0
c) a=0 e b=0
d) a=1 e b=1
e) a=0 e b=-1

Sol.: A questão quer que façamos o produto entre as matrizes A e X, e que igualemos esse resultado à matriz B. Comecemos, pois, pelo produto. Teremos:

→ A . X = $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1a+2b\\ 0a+1b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+2b\\ b\end{bmatrix}$

Daí, igualando a matriz produto encontrada acima à matriz B, teremos:

→ $\begin{bmatrix}a+2b\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

Dessa igualdade, extrairemos os seguintes resultados:
→ **a+2b=2** **e** → **b=1**

Pronto! Se **b=1**, então, substituindo esse resultado na primeira equação acima, teremos que:
→ **a+2b=2** → **a=2-2b** → **a=2-2(1)** → **a=2-2** → **a=0**

Com isso, chegamos ao nosso resultado: **a=0 e b=1 → Resposta!**

03.(AFC/CGU 2003/2004) Genericamente, qualquer elemento de uma matriz M pode ser representado por m_{ij}, onde "i" representa a linha e "j" a coluna em que esse elemento se localiza. Uma matriz X = x_{ij}, de terceira ordem, é a

matriz resultante da soma das matrizes A = (a_{ij}) e B=(b_{ij}). Sabendo-se que $a_{ij} = i^2$ e que $b_{ij} = (i-j)^2$, então o produto dos elementos x_{31} e x_{13} é igual a:

a) 16
b) 18
c) 26
d) 65
e) 169

Sol.: Resolvemos questões praticamente iguais a essa na aula passada. Se o enunciado pede que calculemos o valor de $\mathbf{X_{31}}$ e de $\mathbf{X_{13}}$, e é dito que a matriz **X** é a que resulta da soma entre as matrizes **A** e **B**, então, na verdade, somente nos interessarão os valores dos seguintes elementos: $\mathbf{A_{31}}$ e $\mathbf{A_{13}}$, $\mathbf{B_{31}}$ e $\mathbf{B_{13}}$. Mais do que isso não precisa, uma vez que teremos que:

→ $\mathbf{X_{31}} = \mathbf{A_{31}} + \mathbf{B_{31}}$ e

→ $\mathbf{X_{13}} = \mathbf{A_{13}} + \mathbf{B_{13}}$

A *lei de formação* da matriz A é dada pela questão como sendo $a_{ij} = i^2$. Daí, teremos que:

→ $\mathbf{A_{31} = (3)^2 = 9}$ e $\mathbf{A_{13} = (1)^2 = 1}$

Já no tocante à matriz B, teremos que sua *lei de formação* é a seguinte: $b_{ij} = (i-j)^2$. Daí:

→ $\mathbf{B_{31} = (3-1)^2 = 4}$ e $\mathbf{B_{13} = (1-3)^2 = 4}$

De posse desses resultados, vamos chegar agora ao seguinte:

→ $\mathbf{X_{31}} = \mathbf{A_{31}} + \mathbf{B_{31}}$ → $\mathbf{X_{31} = 9+4 = 13}$

→ $\mathbf{X_{13}} = \mathbf{A_{13}} + \mathbf{B_{13}}$ → $\mathbf{X_{13} = 1+4 = 5}$

O que nos pede, finalmente, a questão? Pede que multipliquemos esses dois últimos resultados obtidos. Teremos, pois, que:

→ $\mathbf{X_{31} . X_{13} = 13 \times 5 = 65}$ → **Resposta!**

04.(Técnico MPU Administrativa 2004 ESAF) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e seja x_{ij} o elemento genérico de uma matriz X tal que X =$(A.B)^t$, isto é, a matriz X é a matriz transposta do produto entre as matrizes A e B. Assim, a razão entre x_{31} e x_{12} é igual a

a) 2.
b) 1/2.
c) 3.
d) 1/3.
e) 1.

Sol.: Mais uma bem ao estilo da Esaf. O primeiro a ser feito é multiplicarmos as duas matrizes fornecidas pelo enunciado. Teremos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1x1+4x1) & (1x3+4x2) & (1x4+4x3) & (1x5+4x4) \\ (2x1+6x1) & (2x3+6x2) & (2x4+6x3) & (2x5+6x4) \\ (3x1+3x1) & (3x3+3x2) & (3x4+3x3) & (3x5+3x4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 16 & 21 \\ 8 & 18 & 26 & 34 \\ 6 & 15 & 21 & 27 \end{bmatrix}$$

Pois bem! Teremos agora que pegar essa matriz produto que encontramos acima, e construir a sua *transposta*! Ora, sabemos que na matriz transposta, quem é linha vira coluna, e só! Teremos, pois, que a matriz X será a seguinte:

→ **$X=(A.B)^t$ =** $\begin{bmatrix} 05 & 08 & 06 \\ 11 & 18 & 15 \\ 16 & 26 & 21 \\ 21 & 34 & 27 \end{bmatrix}$

Daí, o próximo passo será descobrir quais são os valores que ocupam as posições $\mathbf{X_{31}}$ e $\mathbf{X_{12}}$. Quais são? Ora, é só olhar! Encontraremos que: $\mathbf{X_{31}=16}$ e $\mathbf{X_{12}=8}$.

Finalmente, a questão pede que nós calculemos a razão entre X_{31} e X_{12}. Teremos:

→ $X_{31}/X_{12}=16/8$ = **2 → Resposta!**

05. (SERPRO 1997) Uma matriz quadrada A, de terceira ordem, possui determinante igual a 5. O determinante da matriz 2A é igual a:

a) 5
b) 10
c) 20
d) 40
e) 80

Sol.: Se, na hora da prova, ficar difícil de enxergar um caminho para o resultado, é aconselhável que você *crie* uma matriz com as características que o enunciado pede. Neste caso, uma de dimensão (3x3) cujo determinante seja igual a 5.

Aprendemos como fazer isso na aula passada! Lembrados? Bastaria zerarmos todos os valores da matriz, exceto os da diagonal principal, os quais teriam que ser escolhidos, de modo que seu produto seja exatamente igual a 5. Uma possibilidade é a seguinte:

→ **A=** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Concordam? Vejam que o produto dos elementos da diagonal principal é 5. Como todos os outros elementos da matriz são iguais a zero, concluímos que o determinante dessa matriz é 5. Agora a questão pede que nós construamos a matriz 2A e que calculemos o novo determinante. Façamos isso. Teremos:

→ Se **A=** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, então **2A=** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Percebamos que os elementos não pertencentes à diagonal principal continuaram todos iguais a zero. Logo, o determinante da nova matriz será também o produto dos elementos de sua diagonal principal.

Ou seja: **det(2A)=2x2x10=40 → Resposta!**

06.(MPOG 2002) A transposta de uma matriz qualquer é aquela que se obtém trocando linhas por colunas. Sabendo-se que uma matriz quadrada de segunda ordem possui determinante igual a 2, então o determinante do dobro de sua matriz transposta é igual a:
a) −2
b) −1/2
c) 4
d) 8
e) 10

Sol.: Aqui nos fala a questão acerca de uma matriz (2x2) cujo determinante é igual a 2. Poderemos construir uma matriz com essas característica. Uma possível seria a seguinte:

→ **A**= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Daí, a matriz transposta de A seria dada por: → $\mathbf{A^t}$= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, que é a própria matriz A.

Agora, descobriremos qual é a matriz que representa o *dobro* da encontrada acima. Teremos:

→ $\mathbf{2.A^t = 2x}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, cujo determinante é **8 → Resposta!**

07.(AFC-STN-2000) Uma matriz quadrada X de terceira ordem possui determinante igual a 3. Sabendo-se que a matriz Z é a transposta da matriz X, então a matriz Y = 3Z tem determinante igual a
a) 1/3
b) 3
c) 9
d) 27
e) 81

Sol.: Questão semelhante à anterior, só que agora estamos diante de uma matriz de dimensão (3x3), cujo determinante é igual a 3. Criando uma matriz assim, teremos:

→ **X**= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Daí, a transposta de **X** será igual à própria matriz **X**. Concordam? Agora, teremos que multiplicar essa matriz por 3. Teremos:

→ Se **X**= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então **3X**= $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, cujo determinante é **81 → Resposta!**

Passemos a nossa aula de hoje! Nesta aula encerramos os assuntos de Matriz e Determinante.

MENOR COMPLEMENTAR

Consideremos uma matriz **M** de ordem $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$, seja $\mathbf{a_{ij}}$ um elemento de **M**. Definimos **menor complementar** do elemento $\mathbf{a_{ij}}$, e indicamos por $\mathbf{D_{ij}}$, como sendo o determinante da matriz que se obtém, suprimindo a linha **i** e a coluna **j** de **M**.

Exemplo 01) Calcule o menor complementar dos elementos da 1ª coluna da matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Sol.: Os elementos da 1ª coluna são: a_{11} , a_{21} e a_{31}, daí o menor complementar desses elementos serão indicados, respectivamente, por: D_{11} , D_{21} e D_{31}.

1) Cálculo de $\mathbf{D_{11}}$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ \cancel{3} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \cancel{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Daí: $D_{11} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

$\rightarrow D_{11} = 5x6 - 4x1$ $\rightarrow$ $\mathbf{D_{11} = 26}$

2) Cálculo de $\mathbf{D_{21}}$

$$M = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \boxed{3} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ \cancel{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Daí: $D_{21} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

$\rightarrow D_{21} = 0x6 - 4x(-1)$ $\rightarrow$ $\mathbf{D_{21} = 4}$

3) Cálculo de $\mathbf{D_{31}}$

$$M = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \cancel{3} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \boxed{-2} & \cancel{4} & \cancel{6} \end{bmatrix}$$

Daí: $D_{31} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

$\rightarrow D_{31} = 0x1 - 5x(-1)$ $\rightarrow$ $\mathbf{D_{31} = 5}$

COFATOR

Consideremos uma matriz **M** de ordem $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$, seja $\mathbf{a_{ij}}$ um elemento de **M**. Definimos **cofator** de $\mathbf{a_{ij}}$, e indicamos por $\mathbf{A_{ij}}$, como sendo o número $\mathbf{(-1)^{i+j} . D_{ij}}$.

Exemplo 02) Calcule o cofator para cada elemento da 1ª coluna da matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Sol.:

No exemplo anterior havíamos calculado o menor complementar para cada elemento da 1ª coluna, e obtivemos os seguintes resultados:

$$D_{11} = 26 \,, \quad D_{21} = 4 \quad \text{e} \quad D_{31} = 5$$

Este exemplo pede os seguintes cofatores: A_{11} , A_{21} e A_{31} .

Aplicaremos a fórmula do cofator de um elemento: $A_{ij} = (-1)^{i+j}. D_{ij}$

→ $A_{11} = (-1)^{1+1}. D_{11}$ → $A_{11} = (-1)^{2}. 26$ → $\mathbf{A_{11} = 26}$

→ $A_{21} = (-1)^{2+1}. D_{21}$ → $A_{21} = (-1)^{3}. 4$ → $\mathbf{A_{21} = -4}$

→ $A_{31} = (-1)^{3+1}. D_{31}$ → $A_{21} = (-1)^{4}. 5$ → $\mathbf{A_{31} = 5}$

 # TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAPLACE

O determinante de uma matriz **M**, de ordem $\mathbf{n \geq 2}$, é **a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores**.

Como demonstração, calcularemos o determinante da matriz dada no exemplo anterior.

De acordo com o teorema acima, qualquer linha ou coluna pode ser usada para o cálculo do determinante. Como faremos o produto do elemento pelo seu cofator, é interessante que escolhamos uma linha ou coluna que tenha a maior quantidade de zeros, pois é desnecessário calcular o cofator dos elementos que são iguais a zero.
Na matriz M abaixo, deveríamos escolher a 1ª linha ou a 2ª coluna, pois ambas tem um zero. Porém, como no exemplo anterior escolhemos a 1ª coluna para calcularmos os cofatores, então usaremos a 1ª coluna no cálculo do determinante da matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & -1 \\ \mathbf{3} & 5 & 1 \\ \mathbf{-2} & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

→ Cálculo do determinante da matriz M:

Usando a 1ª coluna, o determinante de M é dado por:

→ $\det M = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

Havíamos obtido no exemplo anterior: $A_{11}=26$, $A_{21}=-4$ e $A_{31}=5$.

→ Daí: $\det M = \mathbf{2}.26 + \mathbf{3}.(-4) + (\mathbf{-2}).5$

→ $\det M = 52 - 12 - 10$

→ E, finalmente: $\mathbf{\det M = 30}$

 # INVERSA DE UMA MATRIZ

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. Dizemos que **A** é uma *matriz inversível* se existir uma matriz, chamada de $\mathbf{A^{-1}}$, tal que $\mathbf{A.A^{-1} = A.A^{-1} = I_n}$. Onde $\mathbf{I_n}$ é a matriz identidade de ordem **n**. Se **A** *não é inversível*, dizemos que **A** é uma *matriz singular*.

Exemplo 03) Calcule a inversa da matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Procuramos por M^{-1} que representaremos pela matriz: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Conforme a definição de matriz inversível, o produto da matriz M pela sua inversa M^{-1} é igual a matriz identidade.

Portanto, teremos:

$M^{-1} \times M = I \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Já vimos como se multiplica duas matrizes, portanto só daremos o resultado do produto $M^{-1} \times M$. Teremos:

$$\begin{bmatrix} 2b & -a+b \\ 2d & -c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que as duas matrizes acima sejam iguais é necessário que:

$2b = 1 \qquad -a+b = 0$
$2d = 0 \qquad -c+d = 1$

Encontraremos os valores de a, b, c e d.

→ Como 2b=1, então **b=0,5**.

→ Como 2d=0, então **d=0**.

→ -a+b=0 → -a+0,5=0 → **a=0,5**

→ -c+d=1 → -c+0=1 → **c=-1**

Daí, a inversa da matriz M será a seguinte matriz:

$$\mathbf{M^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}5} & \mathbf{0{,}5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Exemplo 04) Calcule a inversa da matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol.: Para uma matriz de ordem maior que 2, o método que usamos no exemplo anterior para o cálculo da matriz inversa pode ser mais trabalhoso. Mostraremos um outro método para encontrar a inversa de uma matriz.

Podemos obter a inversa de uma matriz pela fórmula:

$$M^{-1} = \frac{\overline{M}}{\det M}$$

Onde: $\overline{M}$ é a *matriz adjunta*.

O que é **matriz adjunta**?

→ Matriz adjunta é a transposta da *matriz dos cofatores*.

E o que é **matriz dos cofatores**?

→ É a matriz que se obtém de M , substituindo cada elemento de M por seu cofator.

Vamos calcular a matriz dos cofatores da matriz B dada abaixo:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Cofator A_{11} = ?

$\mathbf{A_{11}} = (-1)^{1+1}. D_{11} = (-1)^2. D_{11} = \mathbf{D_{11}}$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & -1 \\ 3 & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ -2 & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \longrightarrow \quad D_{11} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$D_{11} = 2x1 - 4x(-4) = 18$

$A_{11} = D_{11} = \mathbf{18}$

2) Cofator A_{12} = ?

$\mathbf{A_{12}} = (-1)^{1+2}. D_{12} = (-1)^3. D_{12} = \mathbf{-D_{12}}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{0} & -1 \\ \mathbf{3} & 2 & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & 4 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \longrightarrow \quad D_{12} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$D_{12} = 3x1 - (-2)x(-4) = -5$

$A_{12} = -D_{12} = -(-5) = \mathbf{5}$

3) Cofator A_{13} = ?

$\mathbf{A_{13}} = (-1)^{1+3}. D_{13} = (-1)^4. D_{13} = \mathbf{D_{13}}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \boxed{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & -4 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad D_{13} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$D_{13} = 3x4 - (-2)x2 = 16$ → $A_{13} = D_{13} = \mathbf{16}$

4) Cofator A_{21} = ?

$\mathbf{A_{21}} = (-1)^{2+1}.\ D_{21} = (-1)^3.\ D_{21} = \mathbf{-D_{21}}$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \boxed{3} & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow D_{21} = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$D_{21} = 0x1 - 4x(-1) = 4 \rightarrow A_{21} = -D_{21} = \mathbf{-4}$

5) Cofator A_{22} = ?

$\mathbf{A_{22}} = (-1)^{2+2}.\ D_{22} = (-1)^4.\ D_{22} = \mathbf{D_{22}}$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & \boxed{2} & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow D_{22} = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$D_{22} = 2x1 - (-2)x(-1) = 0 \rightarrow A_{22} = D_{22} = \mathbf{0}$

6) Cofator A_{23} = ?

$\mathbf{A_{23}} = (-1)^{2+3}.\ D_{23} = (-1)^5.\ D_{23} = \mathbf{-D_{23}}$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & \boxed{-4} \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow D_{23} = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$D_{23} = 2x4 - (-2)x0 = 8 \rightarrow A_{23} = -D_{23} = \mathbf{-8}$

7) Cofator A_{31} = ?

$\mathbf{A_{31}} = (-1)^{3+1}.\ D_{31} = (-1)^4.\ D_{31} = \mathbf{D_{31}}$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ \boxed{-2} & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow D_{31} = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$D_{31} = 0x(-4) - 2x(-1) = 2 \rightarrow A_{31} = D_{31} = \mathbf{-8}$

8) Cofator A_{32} = ?

$\mathbf{A_{32}} = (-1)^{3+2}.\ D_{32} = (-1)^5.\ D_{32} = \mathbf{-D_{32}}$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & \boxed{4} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow D_{32} = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$D_{32} = 2x(-4) - 3x(-1) = -5 \rightarrow A_{32} = -D_{32} = -(-5) = \mathbf{5}$

9) Cofator A_{33} = ?

$\mathbf{A_{33}} = (-1)^{3+3}. D_{33} = (-1)^6. D_{33} = \mathbf{D_{33}}$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & -4 \\ -2 & 4 & \boxed{1} \end{bmatrix} \longrightarrow D_{32} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$D_{33} = 2x2 - 3x0 = 4$ → $A_{33} = D_{33} = \mathbf{4}$

→ Portanto, a **matriz dos cofatores de B** é a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{5} & \mathbf{16} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

→ A **matriz adjunta de B** ($\overline{B}$) é a transposta da matriz dos cofatores, então teremos que:

Matriz adjunta: $\overline{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{-4} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{16} & \mathbf{-8} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$

→ Só falta calcular o determinante da matriz B para obtermos a matriz inversa B^{-1}.

Utilizaremos o Teorema de Laplace para calcularmos o determinante da matriz B. Por este teorema, o determinante de uma matriz é igual a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Escolheremos a primeira linha da matriz B!

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o teorema:

→ **det B** = $2A_{11} + 0A_{12} + (-1)A_{13}$

→ **det B** = 2x18 + 0x5 + (-1)x16

→ **det B = 20**

Agora é só aplicar a fórmula da inversa de uma matriz: $B^{-1} = \dfrac{\overline{B}}{\det B}$

→ $B^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 18 & -4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 \\ 16 & -8 & 4 \end{bmatrix}}{20}$ → $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{20} & \frac{-4}{20} & \frac{-8}{20} \\ \frac{5}{20} & \frac{0}{20} & \frac{5}{20} \\ \frac{16}{20} & \frac{-8}{20} & \frac{4}{20} \end{bmatrix}$

→ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix}$ (E finalmente encontramos a inversa!)

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

1. Matriz Transposta

Se **M** é uma matriz quadrada de ordem **n** e $\mathbf{M^t}$ sua transposta, então:

$$\det(M^t) = \det(M)$$

2. Fila Nula

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer de uma matriz **M** de ordem **n** forem todos **nulos**, então:

$$\det(M) = 0$$

3. Multiplicação de uma fila por uma constante

Se multiplicarmos uma fila (linha ou coluna) qualquer de uma matriz **M** de ordem **n** por um número **k**, o determinante da nova matriz será o produto de **k** pelo determinante de **M.**

det(k vezes uma fila de M) = k.det(M)

4. Multiplicação de uma Matriz por uma constante

Se multiplicarmos uma matriz **M** de ordem **n** por um número **k**, o determinante da nova matriz será o produto de $\mathbf{k^n}$ pelo determinante de **M.**

$$\det(k.M) = k^n \det(M)$$

5. Filas paralelas iguais

Se uma matriz **M** de ordem **n** ≥ **2** tem **duas filas paralelas** formadas por **elementos respectivamente iguais**, então:

$$\det(M) = 0$$

6. Filas paralelas proporcionais

Se uma matriz **M** de ordem **n** ≥ **2** tem **duas filas paralelas** formadas por **elementos respectivamente proporcionais**, então:

$$\det(M) = 0$$

7. Troca de filas Paralelas

Seja **A** uma matriz de ordem **n** ≥ **2**. Se **trocarmos de posição duas filas paralelas** obteremos uma nova matriz **B** tal que:

$$\det(A) = -\det(B)$$

8. Produto de Matrizes

Seja **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem **n**, então:

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

9. Matriz Triangular

O determinante é igual ao **produto dos elementos da diagonal principal**.

Ex.1 : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ → det(A) = 1 x 6 x 3 = 18

Ex.2: $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ → det(B) = 2 x 10 x (-3) = -60 .

10. Matriz Inversa

Seja **B** a **matriz inversa de A**, então a relação entre os determinantes de **B** e **A** é dado por:

$$\boxed{\det(B) = \frac{1}{\det(A)}}$$

SISTEMAS LINEARES

1. Conceito de Equação Linear

Antes de conhecermos um Sistema Linear, devemos saber o que é uma equação linear. Chamamos de equação linear toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b \quad ,$$

onde: $x_1, x_2, x_3, \ldots , x_n$ são as variáveis ou incógnitas,
$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$ são números reais chamados de coeficientes, e
b é um número real chamado de termo independente da equação.

→ Exemplos de equações lineares:
1) $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4$
2) $-3x_1 + x_2 + 10x_3 - x_4 = -7$
3) $6x_1 + 2x_2 = 15$

→ Outros exemplos de equações lineares, mas com outras letras para as variáveis:
1) $2x - 3y + z = 1$
2) $5y + w = -2$

2. Conceito de Sistema Linear

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares.

São exemplos de sistemas lineares:

1) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ -2x + y + 5z = 1 \\ 4x + 2y - z = 19 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 6x + 5y + 4z = -1 \\ x - 9y = 10 \end{cases}$

3. Representação de um Sistema Linear em Forma Matricial

Todo sistema linear pode ser escrito na forma matricial. Encontraremos a forma matricial dos três exemplos dados acima. Ao mesmo tempo aprenderemos a construir a matriz incompleta e a matriz de cada variável de um sistema linear, que serão úteis mais adiante.

1) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\textbf{forma matricial}} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

coeficientes de x

coeficientes de y

termos independentes

→ **Matriz incompleta do sistema =** $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

→ **Matriz de X =** $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

(a partir da matriz incompleta substitua os coeficientes de **x** pelos termos independentes)

→ **Matriz de Y =** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

(a partir da matriz incompleta substitua os coeficientes de **y** pelos termos independentes)

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ -2x + y + 5z = 1 \\ 4x + 2y - z = 19 \end{cases} \xrightarrow{\textbf{forma matricial}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}$

coeficientes de x

coeficientes de y

coeficientes de z

termos independentes

→ **Matriz incompleta do sistema =** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

→ **Matriz de X =** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 19 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(a partir da matriz incompleta substitua os coeficientes de **x** pelos termos independentes)

→ **Matriz de Y =** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 19 & -1 \end{bmatrix}$

(a partir da matriz incompleta substitua os coeficientes de **y** pelos termos independentes)

→ **Matriz de Z =** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 19 & 19 \end{bmatrix}$

(a partir da matriz incompleta substitua os coeficientes de **z** pelos termos independentes)

3) $\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 6x + 5y + 4z = -1 \\ x - 9y = 10 \end{cases}$ $\xrightarrow{\textbf{forma matricial}}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & -9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}$

4. Solução de um Sistema Linear

Considere o seguinte sistema, composto por duas equações lineares: $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$

Um par de valores (x, y) é solução desse sistema, se for solução das duas equações.

1º exemplo) Encontre a solução do sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$

Há várias formas de se obter a solução de um sistema de equações, mostraremos uma forma baseada em determinantes.

O valor de **x** que satisfaz o sistema é dado por:

x = $\dfrac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{x}}{\text{determinante da matriz incompleta}}$

E o valor de **y** que satisfaz o sistema é dado por:

y = $\dfrac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{y}}{\text{determinante da matriz incompleta}}$

Passemos a construir a matriz de x, de y e a matriz incompleta, e também calcular os seus determinantes.

matriz incompleta = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ → determinante = 2 x 4 – 1 x (-5) = **13**

matriz de x = $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ → determinante = 1 x 4 – 7 x (-5) = **39**

matriz de y = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ → determinante = 2 x 7 – 1 x 1 = **13**

Calculados os determinantes, já temos condições de obter os valores das incógnitas:

$$\mathbf{x} = \frac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{x}}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{\mathbf{39}}{\mathbf{13}} = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{y} = \frac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{y}}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{13}} = \mathbf{1}$$

Resposta: uma única solução:(x=3 , y=1) → Sistema Possível e Determinado!

2º exemplo) Encontre a solução do sistema $\begin{cases} 2x & - & 5y & = & 1 \\ -6x & + & 15y & = & -3 \end{cases}$

Passemos a construir a matriz de x, de y e a matriz incompleta, e também calcular os seus determinantes.

matriz incompleta = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$ → determinante = 2 x 15 – (-6) x (-5) = **0**

matriz de x = $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$ → determinante = 1 x 15 – (-3) x (-5) = **0**

matriz de y = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ → determinante = 2 x (-3) – (-6) x 1 = **0**

Calculados os determinantes, já temos condições de obter os valores das incógnitas:

$$\mathbf{x} = \frac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{x}}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \textbf{infinitos valores (indeterminado)}$$

$$\mathbf{y} = \frac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{y}}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \textbf{infinitos valores (indeterminado)}$$

Resposta: existem infinitos pares (x,y) que são soluções! → Sistema Possível e Indeterminado!

Vejamos algumas dessas possíveis soluções!

Isolando a incógnita y na 1ª equação (ou na 2ª equação) obteremos:

2x – 5y = 1 → **y = (2x – 1)/5**

Fazendo **x=3**, o valor de y é: y = (2x – 1)/5 → y = (2 . 3 – 1)/5 → **y = 1**

Fazendo **x=4**, o valor de y é: y = (2x – 1)/5 → y = (2 . 4 – 1)/5 → **y = 7/5**

Para cada valor de x teremos um y, cujos valores são soluções do sistema.

3º exemplo) Encontre a solução do sistema $\begin{cases} x - 4y = 10 \\ -3x + 12y = 5 \end{cases}$

Passemos a construir a matriz de x, de y e a matriz incompleta, e também calcular os seus determinantes.

matriz incompleta = $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$ → determinante = 1 x 12 – (-3) x (-4) = **0**

matriz de x = $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ → determinante = 10 x 12 – 5 x (-4) = **140**

matriz de y = $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ → determinante = 1 x 5 – (-3) x 10 = **35**

Obtidos os determinantes, já temos condições de obter os valores das incógnitas:

$$x = \frac{\text{determinante da matriz de } x}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{140}{0} = \text{não existe (impossível)}$$

$$y = \frac{\text{determinante da matriz de } y}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{35}{0} = \text{não existe (impossível)}$$

Resposta: Não existe um par (x,y) que seja solução! → Sistema Impossível!

Através dos três exemplos resolvidos acima, mostramos as três situações possíveis que podemos encontrar na solução de um sistema linear. Quanto à solução de um sistema linear, temos a seguinte classificação:

1º) O sistema linear é chamado de "**possível**" ou "**compatível**" quando admite **pelo menos uma solução**. Por sua vez, temos:

→ O sistema linear possível é chamado de "**determinado**" quando a **solução for única**;

→ O sistema linear possível é chamado de "**indeterminado**" quando houver **infinitas soluções**.

2º) O sistema linear é chamado de "**impossível**" se **não houver solução**.

→ Para classificar um sistema quanto ao nº de soluções, utilizaremos a seguinte orientação:

1) O sistema será **possível e determinado** se o determinante da <u>matriz incompleta</u> for **diferente de zero.**

No cálculo das incógnitas (x, y, ...) o determinante da matriz incompleta está no denominador, e se este determinante é diferente de zero, então teremos um único resultado para cada incógnita, e, assim, o sistema será possível e determinado. Veja o 1º exemplo resolvido acima!

2) O sistema será **possível e indeterminado** se o determinante da <u>matriz incompleta</u> for **igual a zero** e os determinantes das <u>matrizes das variáveis</u> também forem **iguais a zero**.

Se os determinantes dessas matrizes são iguais a zero, então teremos zero no numerador e no denominador da fórmula de cálculo das incógnitas. Veja o 2º exemplo resolvido acima!

3) O sistema será **impossível** se o determinante da matriz incompleta for **igual a zero** e pelo menos um dos determinantes das matrizes das variáveis for **diferente de zero**.

Na fórmula de cálculo de uma incógnita, se o numerador é diferente de zero, mas o denominador é igual a zero, então não existirá valor para essa incógnita, e, consequentemente, não existirá solução para o sistema. Veja o 3º exemplo resolvido acima!

Obs.: Um sistema linear **homogêneo** (termos independentes iguais a zero) é sempre **possível**. Se o sistema linear homogêneo for **possível e *determinado*** apresentará apenas uma solução (a *solução nula*, também chamada de *solução trivial* ou *imprópria*), e se for **possível e *indeterminado*** apresentará além da *solução nula*, outras soluções *não nulas*, também chamadas de *soluções próprias*.

Exemplos de sistemas lineares homogêneos:

1) $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 4x + 10y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + y + 5z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$

EXEMPLOS RESOLVIDOS DE SISTEMAS LINEARES:

01.(TFC SFC 2001) Um sistema de equações lineares é chamado "possível" ou "compatível" quando admite pelo menos uma solução, e é chamado de "determinado" quando a solução for única e de "indeterminado" quando houver infinitas soluções. A partir do sistema formado pelas equações, X - Y = 2 e 2X + WY = Z, pode-se afirmar que se W = -2 e Z = 4, então o sistema é:

a) impossível e determinado
b) impossível ou determinado
c) impossível e indeterminado
d) possível e determinado
e) possível e indeterminado

Sol.:

No início do enunciado da questão se faz uma conceituação do que é sistema possível, impossível, determinado e indeterminado, que pode nos ajudar caso esqueçamos esses conceitos no momento da prova. Mas é melhor memorizarmos esses conceitos, pois não podemos contar que isso sempre vai ocorrer!

O enunciado fornece duas equações:
1ª) **X – Y = 2**
2ª) **2X + WY = Z**

Se substituirmos os valores de W=-2 e de Z=4 na segunda equação, obteremos:
2ª) **2X – 2Y = 4**

O sistema linear formado pelas duas equações é o seguinte:

$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

Passemos a construir a matriz de x, de y e a matriz incompleta, e também calcular os seus determinantes.

matriz incompleta = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ → determinante = 1 x (-2) – 2 x (-1) = **0**

matriz de x = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ → determinante = 2 x (-2) – 4 x (-1) = **0**

matriz de y = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ → determinante = 1 x 4 – 2 x 2 = **0**

Obtidos os determinantes, já temos condições de obter os valores das incógnitas:

$$\mathbf{x} = \frac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{x}}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \textbf{infinitos valores (indeterminado)}$$

$$\mathbf{y} = \frac{\text{determinante da matriz de } \mathbf{y}}{\text{determinante da matriz incompleta}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \textbf{infinitos valores (indeterminado)}$$

Resposta: existem infinitos pares (x,y) que são soluções! → Sistema Possível e Indeterminado!

02.(Técnico MPU Administrativa 2004 ESAF) Um sistema de equações lineares é chamado "possível" ou "compatível" quando admite pelo menos uma solução; é chamado de "determinado" quando a solução for única, e é chamado de "indeterminado" quando houver infinitas soluções.

$$\begin{cases} ma + 3mb = 0 \\ 2a + mb = 4 \end{cases}$$

Assim, sobre o sistema formado pelas equações em que a e b são as incógnitas, é correto afirmar que

a) se m≠0 e a=2, qualquer valor de b satisfaz o sistema.
b) se m=0, o sistema é impossível.
c) se m=6, o sistema é indeterminado.
d) se m≠0 e a≠2, qualquer valor de b satisfaz o sistema.
e) se m≠0 e m≠6, o sistema é possível e determinado.

Sol.:

- A classificação de um sistema linear é dada por:

sistema linear
- possível
  - determinado (<u>uma única solução</u>)
  - indeterminado (<u>infinitas soluções</u>)
- impossível (<u>nenhuma solução</u>)

- E lembrem-se que:

1) O sistema será **possível e determinado** se o determinante da <u>matriz incompleta</u> for **diferente de zero.**

2) O sistema será **possível e indeterminado** se o determinante da <u>matriz incompleta</u> for **igual a zero** e os determinantes das <u>matrizes das variáveis</u> também forem **iguais a zero**.

3) O sistema será **impossível** se o determinante da matriz incompleta for **igual a zero** e pelo menos um dos determinantes das matrizes das variáveis for **diferente de zero**.

- Inicialmente encontraremos o determinante da matriz incompleta:

A matriz incompleta é retirada a partir do sistema de equações.

$\begin{cases} ma + 3mb = 0 \\ 2a + mb = 4 \end{cases}$ → **matriz incompleta do sistema =** $\begin{bmatrix} m & 3m \\ 2 & m \end{bmatrix}$

Determinante da matriz incompleta:

determinante de $\begin{bmatrix} m & 3m \\ 2 & m \end{bmatrix}$ = m.m – 2.3m = $\mathbf{m^2 - 6m}$

→ Vamos analisar para que valores de m o sistema é possível e determinado:

O determinante da matriz incompleta deve ser diferente de zero!

→ $\mathbf{m^2 - 6m \neq 0}$ → $\mathbf{m(m-6) \neq 0}$ → $\begin{cases} m \neq 0 \\ \quad e \\ m - 6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad m \neq 6 \end{cases}$

Para que **m(m-6)** seja **diferente de zero** é necessário que se tenha $\mathbf{m \neq 0}$ **e** $\mathbf{m \neq 6}$.

Ou seja, se $\mathbf{m \neq 0}$ **e** $\mathbf{m \neq 6}$, então o sistema é possível e determinado!

Acabamos de achar a solução da questão, veja o **item e**:

e) se m≠0 e m≠6, o sistema é possível e determinado.

Resposta: Alternativa E!

Para aprendermos mais sobre sistemas lineares, veremos outras análises.

→ Analisaremos para que valores de m o sistema será impossível e que será possível e indeterminado:

Temos que o determinante da matriz incompleta é igual a: $\mathbf{m^2 - 6m}$

Calcularemos os determinantes da matriz de x e de y:

matriz de x = $\begin{bmatrix} 0 & 3m \\ 4 & m \end{bmatrix}$ → determinante = 0 x m – 4 x 3m = **-12m**

matriz de y = $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ → determinante = m x 4 – 2 x 0 = **4m**

Consideremos que o determinante da matriz incompleta é **igual a zero**:

→ **m^2 – 6m = 0** → **m(m-6) = 0** → $\begin{cases} m = 0 \\ \quad ou \\ m - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 6 \end{cases}$

Para que **m(m-6)** seja **igual a zero** é necessário que se tenha **m=0 ou m=6**.

→O que acontece com os determinantes das matrizes de x e de y quando m=0?

determinante da matriz x = -12m = -12 x 0 = **zero**

determinante da matriz y = 4m = 4 x 0 = **zero**

→O que acontece com os determinantes das matrizes de x e de y quando m=6?

determinante da matriz x = -12m = -12 x 6 = **-72**

determinante da matriz y = 4m = 4 x 6 = **24**

→ Em suma:

Se **m=0** teremos:
→ o determinante da matriz incompleta é igual a zero!
→ o determinante da matriz de x é igual a zero!
→ o determinante da matriz de y é igual a zero!

Concluímos, se **m=0**, **o sistema é possível e determinado**!

Se **m=6** teremos:
→ o determinante da matriz incompleta é igual a zero!
→ o determinante da matriz de x é diferente de zero!
→ o determinante da matriz de y é diferente de zero!

Concluímos, se **m=6**, **o sistema é impossível**!

Como já dissemos, esta aula encerra os assuntos de Matrizes e Determinantes. Estes assuntos são muito importantes e sempre tem questões presentes nos concursos.

Seguem as questões do *Dever de Casa*. É importante, como sempre frisamos, que vocês façam o possível para tentar resolver essas questões!

Atenção, repetimos três questões do dever de casa passado, pois queremos que vocês utilizem as propriedades dos determinantes para resolvê-las.

Um forte abraço a todos! E fiquem com Deus!

DEVER DE CASA

01.(AFC/97) Considerando-se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A soma dos elementos da diagonal principal da matriz D, definida como produto da matriz transposta de A pela matriz inversa de B, é igual a:

a) -10 b) -2 c) I d) 2 e) 10

02.(SERPRO 1997) Uma matriz quadrada A, de terceira ordem, possui determinante igual a 5. O determinante da matriz 2A é igual a:
a) 5 b) 10 c) 20 d) 40 e) 80

03.(MPOG 2002) A transposta de uma matriz qualquer é aquela que se obtém trocando linhas por colunas. Sabendo-se que uma matriz quadrada de segunda ordem possui determinante igual a 2, então o determinante do dobro de sua matriz transposta é igual a:
a) –2
b) –1/2
c) 4
d) 8
e) 10

04.(AFC-STN-2000) Uma matriz quadrada X de terceira ordem possui determinante igual a 3. Sabendo-se que a matriz Z é a transposta da matriz X, então a matriz Y = 3Z tem determinante igual a
a) 1/3
b) 3
c) 9
d) 27
e) 81

05.(Oficial de Chancelaria 2002) Dada a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ X & 1 \end{bmatrix}$$

e sabendo que o determinante de sua matriz inversa é igual a 1/2, então o valor de X é igual a:
a) -1
b) 0
c) 1/2
d) 1
e) 2

06.(BNB 2002 FCC) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & 5 & 1 \\ \mathrm{b} & 3 & 2 \\ \mathrm{c} & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

de determinantes não nulos, para quaisquer valores de "a", "b" e "c", temos

A. det(A) = det(B)
B. det(B) = 2.det(A)
C. det(A) = 2.det(B)
D. det(A) = –2.det(B)
E. det(A) = – det(B)

07.(SERPRO 1996) As matrizes: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 15 \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 10 & 25 & 30 \end{bmatrix}$

apresentam, respectivamente, determinantes iguais a:
a) 0, 0 e 0
b) 1, 1 e 1
c) 0, 1 e 1
d) 2, 3 e 4
e) -1, -1 e -1

08.(Analista MPU Administrativa 2004 ESAF) Sabendo-se que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e que $n \in N$ e $n \geq 1$ então o determinante da matriz $A^n - A^{n-1}$ é igual a

a) 1
b) -1
c) 0
d) n
e) n-1

09.(Téc. MPU Controle Interno 2004 ESAF) 36- Considere as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & b & 6 \\ 5 & 3 & c \end{bmatrix}$$

onde os elementos a, b e c são números naturais diferentes de zero. Então, o determinante do produto das matrizes X e Y é igual a

a) 0.
b) a.
c) a+b+c.
d) a+b.
e) a+c.

10.(Gestor Fazendário MG 2005 ESAF) Considere duas matrizes de segunda ordem, A e B, sendo que $B = 2^{1/4}$ A. Sabendo que o determinante de A é igual a $2^{-1/2}$, então o determinante da matriz B é igual a:

a) $2^{1/2}$
b) 2
c) $2^{-1/4}$
d) $2^{-1/2}$
e) 1

11.(AFRE MG 2005 ESAF) A, B e C são matrizes quadradas de mesma ordem, não singulares e diferentes da matriz identidade. A matriz C é igual ao produto A Z B, onde Z é também uma matriz quadrada. A matriz Z, portanto, é igual a:

a) A^{-1} B C
b) A C^{-1} B^{-1}
c) A^{-1} C B^{-1}
d) A B C^{-1}
e) C^{-1} B^{-1} A^{-1}

12.(AFC/STN 2005 ESAF) Considere duas matrizes quadradas de terceira ordem, **A** e **B**. A primeira, a segunda e a terceira colunas da matriz **B** são iguais, respectivamente, à terceira, à segunda e à primeira colunas da matriz **A**. Sabendo-se que o determinante de **A** é igual a x^3, então o produto entre os determinantes das matrizes **A** e **B** é igual a:

a) $-x^{-6}$
b) $-x^6$
c) x^3
d) −1
e) 1

13.(Analista MPU Administrativa 2004 ESAF) Com relação ao sistema $\begin{cases} ax - 2y = 0 \\ x + 2a = 0 \end{cases}$ de incógnitas x e y, é correto afirmar que o sistema

a) tem solução não trivial para uma infinidade de valores de a.
b) tem solução não trivial para dois e somente dois valores distintos de a.
c) tem solução não trivial para um único valor real de a.
d) tem somente a solução trivial para todo valor de a.
e) é impossível para qualquer valor real de a.

14. Encontre os valores de **a** para que o sistema seja **possível e determinado**, **possível e indeterminado** e **impossível**.

$$\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$$