AULA DEZESSEIS: TRIGONOMETRIA

Olá, amigos!

Novamente pedimos desculpas por não ter sido possível apresentarmos esta aula 16 na semana passada. Este final de ano está muito corrido e atribulado!

Daremos hoje início a um novo assunto: Trigonometria!

Como de praxe, apresentaremos muitas questões de concursos passados que servirão no nosso aprendizado, e também para sabermos qual é a profundidade exigida deste assunto dentro das provas de Raciocínio Lógico.

Esperamos que todos tenham aprendido bem o assunto de Matrizes e Sistemas Lineares e que tenham resolvidos as questões que ficaram do *dever de casa* passado. Caso alguém tenha encontrado alguma dificuldade, é só dar uma conferida nas respectivas resoluções, apresentadas na seqüência. Vamos a elas!

DEVER DE CASA

01.(AFC/97) Considerando-se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A soma dos elementos da diagonal principal da matriz D, definida como produto da matriz transposta de A pela matriz inversa de B, é igual a:

a) -10 b) -2 c) I d) 2 e) 10

Sol.:

Simbolicamente a matriz D é dada por:

$$\mathbf{D = A^tB^{-1}},$$

onde A^t é a transposta de A, e B^{-1} é a inversa de B.

1º passo) Cálculo da matriz transposta de A.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e queremos a sua transposta.

Ora, sabemos que na matriz transposta, quem é linha vira coluna, e só! Teremos, pois, que a matriz A^t será a seguinte:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2º passo) Cálculo da matriz inversa de B.

Temos que $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e queremos a sua inversa B^{-1}.

Representaremos B^{-1} pela matriz: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Conforme a definição de matriz inversível, o produto da matriz B pela sua inversa B^{-1} é igual a matriz identidade. Portanto, teremos:

$$B^{-1} \times B = I \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Após a multiplicação das matrizes, teremos:

$$\begin{bmatrix} a+b & a+2b \\ c+d & c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que as duas matrizes acima sejam iguais é necessário que:

a+b = 1 (I) a+2b = 0 (II)
c+d = 0 (III) c+2d = 1 (IV)

Encontraremos os valores de a, b, c e d.

De (II), temos que: a = -2b. Substituindo esse resultado em (I), teremos:

→ a+b = 1 → -2b + b = 1 → **b = -1**

De (I), obtemos o valor de a:

→ a+b = 1 → a + (-1) = 1 → **a = 2**

De (III), temos que: c = -d. Substituindo esse resultado em (IV), teremos:

→ c+2d = 1 → -d + 2d = 1 → **d = 1**

De (III), obtemos o valor de c:

→ c+d = 0 → c + 1 = 0 → **c = -1**

Daí, a inversa da matriz B será a seguinte matriz:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3º passo) Cálculo da matriz $D = A^t B^{-1}$

$$D = A^t B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando as duas matrizes, teremos como resultado:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

A questão solicita a soma dos elementos da diagonal principal da matriz D, daí:

1 + (-3) = -2 (Resposta: alternativa B!)

02.(SERPRO 1997) Uma matriz quadrada A, de terceira ordem, possui determinante igual a 5. O determinante da matriz 2A é igual a:

a) 5 b) 10 c) 20 d) 40 e) 80

Sol.:

Usaremos a seguinte propriedade dos determinantes:

→ Se multiplicarmos uma matriz **M** de ordem **n** por um número **k**, o determinante da nova matriz será o produto de $\mathbf{k^n}$ pelo determinante de **M**.

$$\mathbf{det\,(k.M) = k^n\, det(M)}$$

Aplicando a propriedade acima para calcular o determinante da matriz 2A, teremos:

det (2A) = 2^3 det(A)

Daí: → **det (2A) = 8 det(A)**

→ **det (2A) = 8 x 5**

E, portanto: **det (2A) = 40** **(Resposta: alternativa D!)**

03.(MPOG 2002) A transposta de uma matriz qualquer é aquela que se obtém trocando linhas por colunas. Sabendo-se que uma matriz quadrada de segunda ordem possui determinante igual a 2, então o determinante do dobro de sua matriz transposta é igual a:

a) –2
b) –1/2
c) 4
d) 8
e) 10

Sol.:

Na solução desta questão usaremos a propriedade usada na solução da questão anterior e também a seguinte propriedade:

→ Se **M** é uma matriz quadrada de ordem **n** e **M^t** sua transposta, então: **det(M^t) = det(M)**

Designaremos a matriz qualquer comentada no enunciado por **M**.

Segundo o enunciado, **M** é uma **matriz de segunda ordem** e **det(M)=2**, e ele deseja o cálculo do determinante do dobro de sua matriz transposta, ou seja, o determinante da matriz **$2M^t$**.

Vamos ao cálculo do determinante da matriz $2M^t$.

→ $\det(2M^t) = 2^2 . \det(M^t) = 4 . \det(M) = 4 . 2 =$ **8** **(Resposta: alternativa D!)**

04.(AFC-STN-2000) Uma matriz quadrada X de terceira ordem possui determinante igual a 3. Sabendo-se que a matriz Z é a transposta da matriz X, então a matriz Y = 3Z tem determinante igual a

a) 1/3
b) 3
c) 9
d) 27
e) 81

Sol.:

A solução desta questão é praticamente idêntica a da anterior, e usaremos as mesmas duas propriedades.

Segundo o enunciado, **X** é uma matriz quadrada de **terceira ordem** e **det(X)=3**. Solicita-se no enunciado o determinante da matriz $Y = 3Z = 3X^t$.

Vamos ao cálculo do determinante da matriz **$Y = 3X^t$**.

→ $\det(Y) = \det(3X^t) = 3^3 . \det(X^t) = 27 . \det(X) = 27 \times 3 =$ **81**

Resposta: alternativa E!

05.(Oficial de Chancelaria 2002) Dada a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ X & 1 \end{bmatrix}$$

e sabendo que o determinante de sua matriz inversa é igual a 1/2, então o valor de X é igual a:

a) -1
b) 0
c) 1/2
d) 1
e) 2

Sol.:

Na solução dessa questão, usaremos a seguinte propriedade:

→ Seja $\mathbf{A^{-1}}$ a **matriz inversa de A**, então a relação entre os determinantes de $\mathbf{A^{-1}}$ e **A** é dado por:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Consideraremos que a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ X & 1 \end{bmatrix}$.

Segundo o enunciado, o determinante da matriz inversa de A é igual a 1/2, ou seja, $\det(A^{-1})$ = 1/2.

Aplicando a propriedade descrita acima, obteremos o determinante da matriz A. Teremos:

→ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ → $1/2 = \frac{1}{\det(A)}$ → $\det(A) = 2$

Passaremos ao cálculo do determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ X & 1 \end{bmatrix}$.

→ det(A) = 1 . 1 – X . 1 → det(A) = 1 – X

Mas já sabíamos que det(A)=2, daí podemos obter o valor de X. Teremos:

1 – X = 2 → **X = -1 (Resposta: Alternativa A)**

06.(BNB 2002 FCC) Dadas as matrizes

A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **e B =** $\begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{bmatrix}$

,

de determinantes não nulos, para quaisquer valores de "a", "b" e "c", temos

A. det(A) = det(B)
B. det(B) = 2.det(A)
C. det(A) = 2.det(B)
D. det(A) = –2.det(B)

E. det(A) = – det(B)

Sol.:

As alternativas da questão trazem relações entre os determinantes de A e B, portanto na solução da questão tentaremos obter inicialmente uma relação entre as matrizes A e B para depois encontrar uma relação entre os seus determinantes.

Observe que há duas linhas da matriz A que são iguais a duas colunas da matriz B, então faremos a transposta de B para ficar parecido com a matriz A.

A transposta da matriz B será: $\mathbf{B^t} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

A matriz $\mathbf{B^t}$ é muito parecida com a matriz A, somente a última linha que é diferente, mas perceberam a relação entre a terceira linha de **A** e a terceira linha de $\mathbf{B^t}$? Está fácil de ver! Os elementos da terceira linha de A são o dobro dos elementos correspondentes na terceira linha de B^t.

Por tudo isso, podemos fazer a seguinte relação entre A e B: a matriz A é igual a matriz obtida multiplicando-se por dois a terceira linha da transposta de B. Simbolicamente, temos:

A = 2 x (a terceira linha de $\mathbf{B^t}$)

Para estabelecer uma relação entre os determinantes de A e B, usaremos as seguintes propriedades dos determinantes:

→ Se multiplicarmos uma fila (linha ou coluna) qualquer de uma matriz **M** de ordem **n** por um número **k**, o determinante da nova matriz será o produto de **k** pelo determinante de **M**.

→ Se **M** é uma matriz quadrada de ordem **n** e $\mathbf{M^t}$ sua transposta, então: **det($\mathbf{M^t}$) = det(M)**

Aplicando as propriedades acima, teremos a seguinte relação entre os determinantes de A e B:

→ det(A) = det(2 x (a terceira linha de B^t))

→ det(A) = 2 x det(B^t)

→ det(A) = 2 x det(B)

→ det(A) = 2 x det(B)

det(A) = 2det(B) (Resposta!)

07.(SERPRO 1996) As matrizes: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ **,** $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 15 \end{bmatrix}$ **e** $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 10 & 25 & 30 \end{bmatrix}$

apresentam, respectivamente, determinantes iguais a:

a) 0, 0 e 0
b) 1, 1 e 1
c) 0, 1 e 1
d) 2, 3 e 4
e) -1, -1 e -1

Sol.:

Observando os elementos das três matrizes acima, chegaremos aos seguintes resultados:

→ Os elementos da segunda linha da matriz X são exatamente o dobro dos elementos correspondentes da primeira linha.

→ Os elementos da terceira coluna da matriz Y são exatamente o triplo dos elementos correspondentes da primeira coluna.

→ Os elementos da terceira linha da matriz Z são exatamente o quíntuplo dos elementos correspondentes da terceira coluna.

Para obter os determinantes das matrizes acima, usaremos a seguinte propriedade dos determinantes:
→Se uma matriz **M** de ordem n ≥ 2 tem **duas filas paralelas** formadas por **elementos respectivamente proporcionais**, então: **det(M) = 0**.

Concluímos, então, que os determinantes de X, Y e Z são iguais a zero.

Resposta: alternativa A.

08.(Analista MPU Administrativa 2004 ESAF) Sabendo-se que a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **e que** $n \in \mathrm{N}$ **e** $n \geq 1$ **então o determinante da matriz** $A^n - A^{n-1}$ **é igual a**

a) 1
b) -1
c) 0
d) n
e) n-1

Sol.:

A questão solicita o determinante da matriz $A^n - A^{n-1}$, onde:

→ $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

→ $n \in \mathrm{N}$ **e** $n \geq 1$

A multiplicação de matrizes goza das propriedades seguintes:

1) é associativa: (AB)C = A(BC)
2) é distributiva à direita: (A+B)C = AC + BC
3) é distributiva à esquerda: C(A+B) = CA + CB
4) (kA)B = A(kB) = k(AB)

Daqui a pouco usaremos a terceira propriedade descrita acima.

Temos a expressão matricial $A^n - A^{n-1}$. Mas podemos reescrevê-la, sem alterar o resultado, por:

$$(A^{n-1}.A) - (A^{n-1}.I)$$

Se colocarmos em evidência o termo A^{n-1} , a expressão matricial passa a ser:

$$A^{n-1}(A - I)$$

Agora, vamos substituir a matriz A e a matriz identidade I que estão dentro do parêntese, pelas suas respectivas matrizes. Então, teremos:

$$\mathbf{A^{n-1}}\ \left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

Subtraindo as matrizes que estão dentro do parêntese, obteremos:

$$\mathbf{A^{n-1}}\ \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

Para calcular o determinante da expressão matricial acima, usaremos a seguinte propriedade dos determinantes: det(AB) = det(A).det(B).

Daí: $\det\left(\mathbf{A^{n-1}}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\right) = \det(\mathbf{A^{n-1}}) . \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$

O determinante de $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ é igual a zero, porque essa matriz possui uma coluna com elementos iguais a zero.

Daí: $\det(\mathbf{A^{n-1}}) . \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \det(\mathbf{A^{n-1}}) . 0 = \mathbf{0}$

Resposta: alternativa C.

09.(Téc. MPU Controle Interno 2004 ESAF) 36- Considere as matrizes

$$X = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 7\end{bmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{bmatrix}a & 2 & 3\\ 2 & b & 6\\ 5 & 3 & c\end{bmatrix}$$

onde os elementos a, b e c são números naturais diferentes de zero. Então, o determinante do produto das matrizes X e Y é igual a

a) 0.
b) a.
c) a+b+c.
d) a+b.
e) a+c.

Sol.:

Observando os elementos da matriz X, chegaremos ao seguinte resultado:

→ Os elementos da segunda linha da matriz X são exatamente o dobro dos elementos correspondentes da primeira linha.

Daí, já descobrimos que o **determinante da matriz X é igual a zero**.

A questão solicita o determinante do produto das matrizes X e Y, ou seja, o det(XY).

Pelas propriedades dos determinantes, sabemos que det(XY) = det(X).det(Y). Daí:

→ det(XY) = det(X).det(Y) = 0 . det(Y) = 0

Resposta: alternativa A.

10.(Gestor Fazendário MG 2005 ESAF) Considere duas matrizes de segunda ordem, A e B, sendo que B = $2^{1/4}$ A. Sabendo que o determinante de A é igual a $2^{-1/2}$, então o determinante da matriz B é igual a:

a) $2^{1/2}$
b) 2
c) $2^{-1/4}$
d) $2^{-1/2}$
e) 1

Sol.:

A relação entre as matrizes A e B, segundo o enunciado, é: **B = $2^{1/4}$ A**, onde A e B são matrizes quadradas de segunda ordem.

O determinante de B é dado por:

$$\det(B) = \det(2^{1/4} A)$$

Para calcular o determinante de B, usaremos a seguinte propriedade dos determinantes:

→ Se multiplicarmos uma matriz **M** de ordem **n** por um número **k**, o determinante da nova matriz será o produto de k^n pelo determinante de **M**, ou seja:

$$\det(k.M) = k^n \det(M)$$

Aplicando a propriedade, teremos:

$$\rightarrow \det(B) = \det(2^{1/4} A) = (2^{1/4})^2.\det(A)$$

$$\rightarrow \det(B) = (2^{1/2}).\det(A)$$

Segundo o enunciado, o determinante de A é igual a $2^{-1/2}$. Daí:

$$\rightarrow \det(B) = (2^{1/2}) \,.\, 2^{-1/2} = 2^{1/2 - 1/2} = 2^0 = 1$$ **(Resposta: alternativa E!)**

11.(AFRE MG 2005 ESAF) A, B e C são matrizes quadradas de mesma ordem, não singulares e diferentes da matriz identidade. A matriz C é igual ao produto A Z B, onde Z é também uma matriz quadrada. A matriz Z, portanto, é igual a:

a) A^{-1} B C
b) A C^{-1} B^{-1}
c) A^{-1} C B^{-1}
d) A B C^{-1}
e) C^{-1} B^{-1} A^{-1}

Sol.:

Do enunciado, temos que a seguinte igualdade: **C = AZB**.

Para encontrarmos a matriz Z, ela deve ficar isolada em um dos lados da igualdade, como se encontra o C neste momento.

Para isolar o Z, devemos efetuar multiplicações entre matrizes. Considere os seguintes passos:

1º passo) Multiplicaremos ambos os lados da igualdade por A^{-1} a fim de desaparecer a matriz A do segundo membro da igualdade.

$$A^{-1}. C = A^{-1} . AZB$$

Essa igualdade pode ser escrita assim: $A^{-1}C = (A^{-1}.A)ZB$

O produto de uma matriz pela sua inversa é igual à matriz identidade. Daí:

$$A^{-1}C = (I)ZB$$

O produto de uma matriz pela matriz identidade, não altera a matriz. Daí:

$$\mathbf{A^{-1}C = ZB}$$

2º passo) Multiplicaremos ambos os lados da igualdade por B^{-1} a fim de desaparecer a matriz B do segundo membro da igualdade.

$$\mathbf{A^{-1}C \,.\, B^{-1} = ZB \,.\, B^{-1}}$$

Essa igualdade pode ser escrita assim: $\mathbf{A^{-1}C\, B^{-1} = Z\,(B \,.\, B^{-1})}$

O produto de uma matriz pela sua inversa é igual à matriz identidade. Daí:

$$\mathbf{A^{-1}C\, B^{-1} = Z\,(I)}$$

O produto de uma matriz pela matriz identidade, não altera a matriz. Daí:

$$\mathbf{A^{-1}C\, B^{-1} = Z}$$

Portanto, encontramos que $\mathbf{Z = A^{-1}C\, B^{-1}}$ **(Resposta: alternativa C !)**

12.(AFC/STN 2005 ESAF) Considere duas matrizes quadradas de terceira ordem, A e B. A primeira, a segunda e a terceira colunas da matriz B são iguais, respectivamente, à terceira, à segunda e à primeira colunas da matriz A. Sabendo-se que o determinante de A é igual a x^3, então o produto entre os determinantes das matrizes A e B é igual a:

a) $-x^{-6}$
b) $-x^6$
c) x^3
d) -1
e) 1

Sol.:

Temos as seguintes informações:

→ A e B são matrizes quadradas de terceira ordem.
→ A primeira, a segunda e a terceira colunas da matriz B são iguais, respectivamente, à terceira, à segunda e à primeira colunas da matriz A.
→ O determinante de A é igual a x^3.

A questão solicita o produto entre os determinantes das matrizes A e B, ou seja:

$$\mathbf{det(A).det(B) = ?}$$

Já sabemos que o det(A) = x^3, falta-nos encontrar o det(B).

Podemos descrever a matriz B em função das colunas de A, da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \textbf{terceira coluna de A} & \textbf{segunda coluna de A} & \textbf{primeira coluna de A} \end{pmatrix}$$

Para encontrar o determinante de B, usaremos a seguinte propriedade dos determinantes:

→ Seja **X** uma matriz de ordem **n** ≥ **2**. Se **trocarmos de posição duas filas paralelas** obteremos uma nova matriz **Z** tal que: **det(Z) = – det(X)**.

Pelo desenho da matriz B acima, observamos que a matriz B é obtida pela troca de posição entre a primeira coluna e a terceira coluna da matriz A. Daí:

$$\mathbf{det(B) = - det(A)}$$

E, portanto: **det(B) = - x^3**

O produto **det(A).det(B)** será igual a:

det(A).det(B) = x^3 . (- x^3) = -x^6 (Resposta: alternativa B !)

13.(Analista MPU Administrativa 2004 ESAF) Com relação ao sistema $\begin{cases} ax - 2y = 0 \\ x + 2a = 0 \end{cases}$ de incógnitas x e y, é correto afirmar que o sistema

a) tem solução não trivial para uma infinidade de valores de a.
b) tem solução não trivial para dois e somente dois valores distintos de a.
c) tem solução não trivial para um único valor real de a.
d) tem somente a solução trivial para todo valor de a.
e) é impossível para qualquer valor real de a.

Sol.:

As variáveis (incógnitas) do sistema acima são x e y.

A segunda equação do sistema não apresenta a variável y, daí podemos obter facilmente o valor de x do sistema. Da segunda equação, teremos:

x + 2a = 0 → **x = -2a**

Substituindo este valor de x na primeira equação, encontraremos o valor de y do sistema:

→ ax – 2y = 0 → a . (-2a) – 2y = 0 → -2a^2 – 2y = 0 → **y = -a^2**

A solução do sistema é:

x = -2a e **y = -a^2**

Destes resultados, concluímos que x e y tem uma infinidade de valores, que dependerão do valor de a. Se **a** for zero teremos a solução trivial x=0 e y=0, e para quaisquer outros valores de a teremos soluções não triviais.

Resposta: alternativa A.

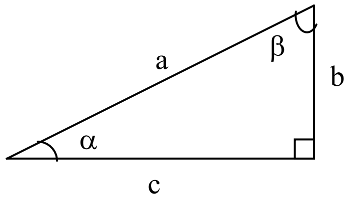
Agora, sim, falemos sobre Trigonometria!

NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA

1. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Denominamos de triângulo retângulo, o triângulo que possui ângulo interno de um de seus vértices igual a 90º.

Triângulo retângulo



Na figura acima α e β são os ângulos agudos do triângulo retângulo, e eles são complementares (α + β = 90º).

O lado maior **c** é chamado de hipotenusa e os lados **a** e **b** são chamados de catetos.

As razões trigonométricas fundamentais usando o ângulo α são:

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \qquad tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

As razões trigonométricas fundamentais usando o ângulo β são:

$$sen\beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad tg\beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \frac{c}{b}$$

Das razões trigonométricas fundamentais acima, podemos demonstrar as relações mostradas abaixo:

1º) $sen\alpha = \cos\beta$ e $sen\beta = \cos\alpha$

2º) $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

3º) $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ e $tg\beta = \frac{sen\beta}{\cos\beta}$

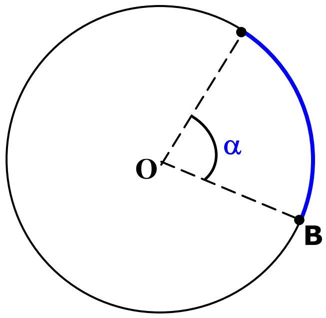
4º) $tg\alpha \times tg\beta = 1$

2. O CICLO TRIGONOMÉTRICO

→ Arcos e Ângulos

Seja uma circunferência de centro O sobre a qual tomamos dois pontos distintos, A e B. A abertura do ângulo α descreve na circunferência o **arco AB**.

A



As unidades do ângulo e do arco são dadas em graus (º) ou radianos (rad). Devemos lembrar da relação entre estas unidades:

π rad = 180º (meia volta) ou **2π rad = 360º (1 volta)**

Mostraremos como se converte de graus para radianos, e vice-versa.

→ Conversão de graus para radianos

1) 60º

Para converter de graus para radianos podemos usar uma simples regra de três;

x rad ------- 60º
π rad ------- 180º

Daí: $180x = 60\pi$ → $x = \frac{60\pi}{180}$ → $x = \frac{\pi}{3}$

Resposta: 60º = $\frac{\pi}{3}$ rad

2) 270º

Também podemos usar a seguinte regra prática: multiplicar o valor em graus por $\frac{\pi}{180}$.

Daí: $270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$

Resposta: 270º = $\frac{3\pi}{2}$ rad

→ Conversão de radianos para graus

1) $\frac{\pi}{6}$

Usaremos uma simples regra de três:

x ------- $\frac{\pi}{6}$ rad
180º ------- π rad

Daí: $\pi x = 180.\frac{\pi}{6}$ → $x = \frac{180}{6}$ → $x = 30$

Resposta: $\frac{\pi}{6}$ rad = 30º

2) $\frac{2\pi}{3}$

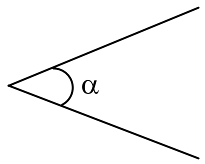
Também podemos usar a seguinte regra prática: multiplicar o valor em radianos por $\frac{180}{\pi}$.

Daí: $\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = \frac{360}{3} = 120$

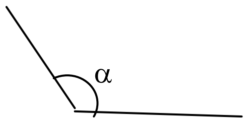
Resposta: $\frac{2\pi}{3}$ rad = 120º

→ **Classificação do ângulo**

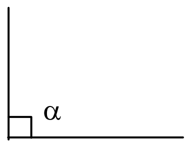
O ângulo é chamado de **agudo** quando ele é **menor que 90º(**ou π**/2)**.



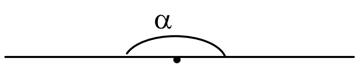
O ângulo é chamado de **obtuso** quando ele é **maior que 90º(**ou π**/2)**.



O ângulo é chamado de **reto** quando ele é **igual a 90º(**ou π**/2)**.



O ângulo é chamado de **raso** quando ele é **igual a 180º(**ou π**)**.



→ **Relação entre dois ângulos:**

Dois ângulos são complementares quando a soma deles é igual a **90º(**ou π**/2)**.

Dois ângulos são suplementares quando a soma deles é igual a **180º(**ou π**)**.

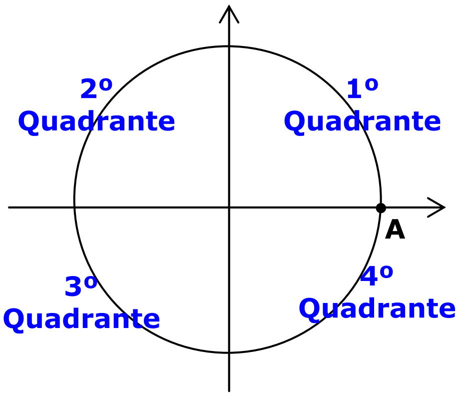
Dois ângulos são replementares quando a soma deles é igual a **360º(**ou 2π**)**.

Dois ângulos são explementares quando a subtração deles é igual a **180º(**ou π**)**.

→ O Ciclo Trigonométrico

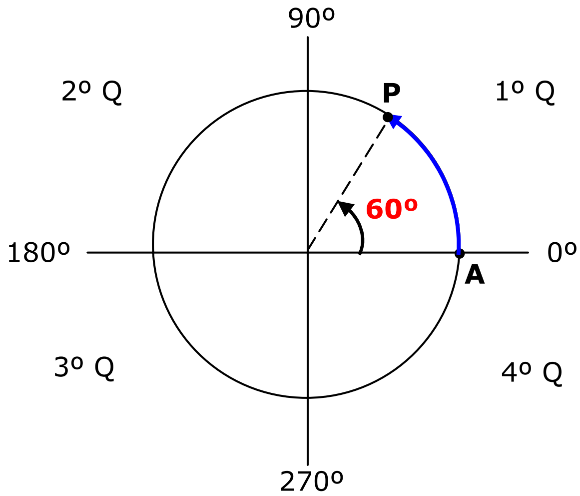
Para estudar as funções trigonométricas do seno, coseno, ... precisamos antes conhecer o ciclo trigonométrico.

O ciclo trigonométrico apresenta uma circunferência de raio unitário, dois eixos ortogonais cruzando-se no centro da circunferência e são orientados conforme as indicações: o vertical, com sentido para cima, e o horizontal, para a direita. Os eixos ortogonais dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes, conforme mostrado abaixo.

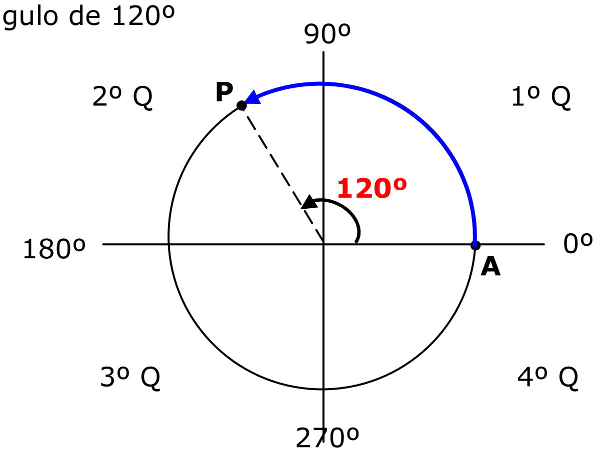


O ângulo positivo é marcado no ciclo trigonométrico a partir do ponto origem A e no sentido anti-horário. O ponto P marca a extremidade do arco descrito pelo ângulo. Mostraremos alguns exemplos:

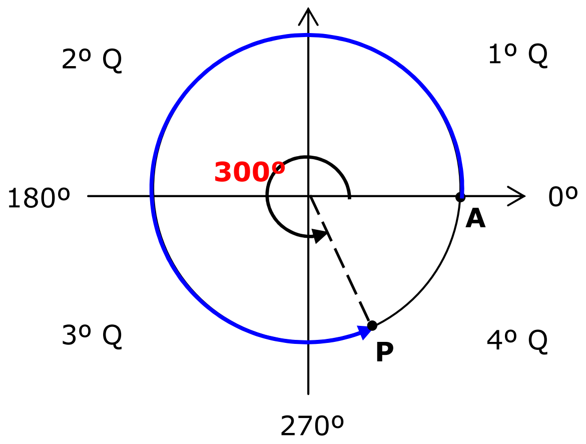
1º) Marcação do ângulo de 60º



2º) Marcação do ângulo de 120º

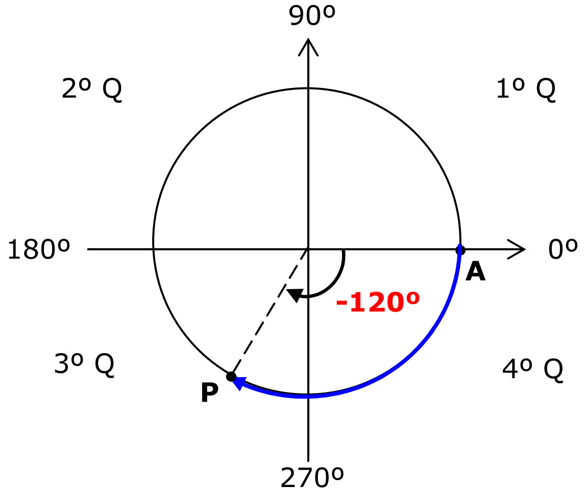


3º) Marcação do ângulo de 300º



O ângulo negativo é marcado no ciclo trigonométrico a partir do ponto origem A e no sentido horário. O ponto P marca a extremidade do arco descrito pelo ângulo. Mostraremos alguns exemplos:

1º) Marcação do ângulo de –120º



→ **Ângulos Côngruos ou Congruentes:**

Um ângulo maior em valor absoluto que 360º (ou 2π) percorre mais de uma volta no ciclo trigonométrico, e possui um ângulo congruente a ele que é menor que 360º. Dois ângulos são congruentes quando possuem o mesmo ponto inicial (A) e o mesmo ponto final (P).

Qual é o ângulo congruente a 480º?

Para calcular esse ângulo devemos fazer uma operação de divisão por 360º.

$$\begin{array}{r|l} 480 & 360 \\ \hline (\mathbf{120}) & \mathbf{1} \end{array}$$

O quociente **1** significa o número de voltas completas que o 480º dá no ciclo trigonométrico.

O resto **120** é exatamente o ângulo congruente a 480º. Portanto, temos que 480º é congruente a 120º (ou 480º=120º).

Outro exemplo: Qual é o ângulo congruente a 1105º?

$$\begin{array}{l|l} 1105 & \underline{360} \\ (\mathbf{25}) & \mathbf{3} \end{array}$$

O quociente **3** significa o número de voltas completas que o 1105º dá no círculo trigonométrico.

O resto **25** é exatamente o ângulo congruente a 1105º. Portanto, temos que 1105º é congruente a 25º (ou 1105º=25º).

Outro exemplo: Qual é o ângulo congruente a –1580º?

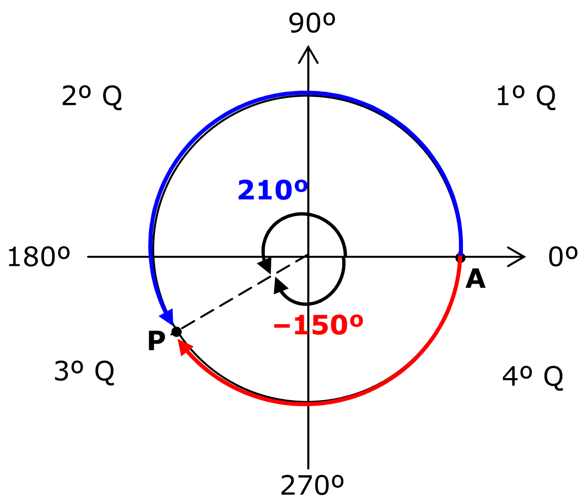
$$\begin{array}{l|l} 1580 & \underline{360} \\ (\mathbf{140}) & \mathbf{4} \end{array}$$

O quociente **4** significa o número de voltas completas que o –1580º dá no círculo trigonométrico no sentido horário.

O resto **140** é o valor absoluto em graus que o ângulo de –1580º percorre após completar as 4 voltas, daí –1580º é congruente a –140º (ou –1580º=–140º).

Podemos ainda determinar qual é o ângulo positivo congruente a um ângulo negativo. Explicaremos através de um exemplo. Qual é o ângulo positivo congruente a –130º?

Para o –150° completar uma volta falta percorrer um valor absoluto em graus de 210º (= 360º–150º). Daí, 210º é o ângulo positivo congruente a –150º. Veja o desenho.



→ Forma generalizada de congruência de um ângulo

Todos os ângulos de origem A e extremidade P (diferindo apenas por um número inteiro k de voltas) são considerados ângulos congruentes entre si, pois ao somarmos ou subtrairmos a um ângulo um valor múltiplo de 360º (ou 2π) só estamos dando voltas no ciclo, mas sempre terminando no mesmo ponto P.

A forma generalizada de todos os ângulos congruentes a um certo ângulo α é dada pela expressão:

Em radianos: α **+ 2k**π

Em graus: α **+ k.360º**

onde K pertence ao conjunto dos números inteiros: {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

→ Simetrias

No ciclo trigonométrico, interessam-nos diretamente três tipos de simetrias, a saber: **em relação ao eixo vertical**, **em relação ao eixo horizontal** e **em relação ao centro**. Essas simetrias serão úteis na parte de funções circulares.

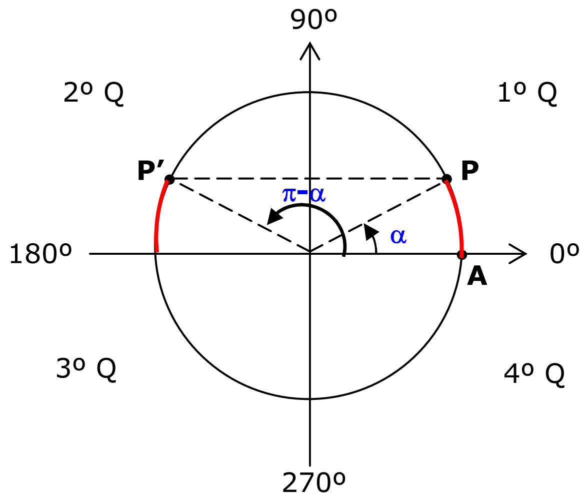
Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida α, do 1º quadrante e da 1ª volta, ou seja, $0 < \alpha < 90^\circ$.

 # Simetria em relação ao eixo vertical

Seja P a extremidade do ângulo de medida α. O simétrico de **P** em relação ao eixo vertical é o ponto **P'**, extremidade do ângulo de medida $\pi-\alpha$. Os ângulos α e $\pi-\alpha$ são suplementares.

Observe na figura que os pontos **P** e **P'** possuem a mesma projeção no eixo vertical e também terão as mesmas projeções no eixo horizontal, porém invertidas.

Para designar o conjunto dos ângulos que possuem extremidade P, podemos escrever $\alpha+2k\pi$, e para os ângulos de extremidades P', $(\pi-\alpha)+2k\pi$.

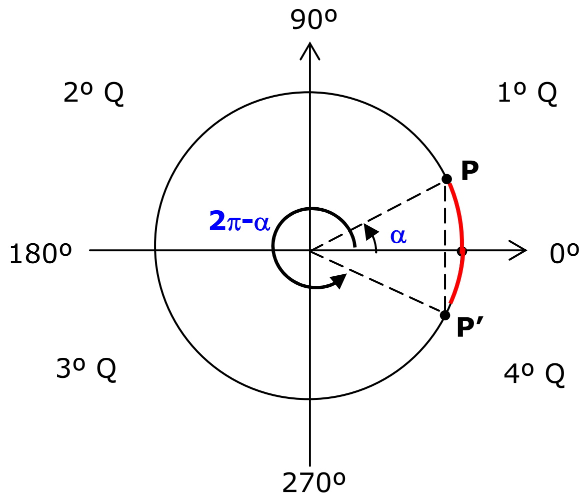


 # Simetria em relação ao eixo horizontal

Seja P a extremidade do ângulo de medida α. O simétrico de **P** em relação ao eixo horizontal é o ponto **P'**, extremidade do ângulo de medida $2\pi-\alpha$. Os ângulos α e $2\pi-\alpha$ são replementares.

Observe na figura que os pontos **P** e **P'** possuem a mesma projeção no eixo horizontal e também terão as mesmas projeções no eixo vertical, porém invertidas.

Para designar o conjunto dos ângulos que possuem extremidade P, podemos escrever $\alpha+2k\pi$, e para os ângulos de extremidades P', $(2\pi-\alpha)+2k\pi$.

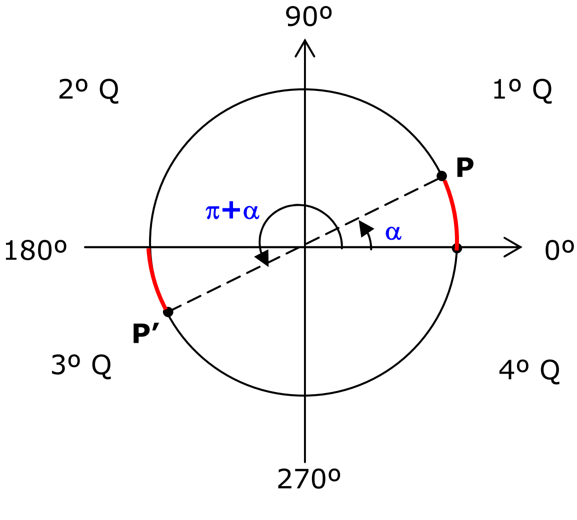


 # Simetria em relação ao centro do ciclo

Seja P a extremidade do ângulo de medida α. O simétrico de **P** em relação ao eixo centro do ciclo é o ponto **P’**, extremidade do ângulo de medida $\alpha+\pi$. Os ângulos α e $\alpha+\pi$ são explementares.

Observe na figura que os pontos **P** e **P’** possuem a mesma projeção no eixo horizontal e também no eixo vertical, porém ambas são invertidas.

Para designar o conjunto dos ângulos que possuem extremidade P, podemos escrever $\alpha+2k\pi$, e para os ângulos de extremidades P’, $(\alpha+\pi)+2k\pi$.



→ FUNÇÕES CIRCULARES

Seja α um ângulo agudo, de tal forma que o arco correspondente a ele possua extremidade P.

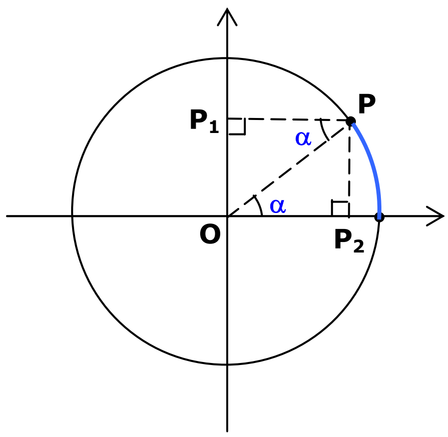
Unindo O a P, obtemos o raio unitário $\overline{OP}$.

Construindo dois triângulos retângulos, ambos com ângulo agudo α e hipotenusa $\overline{OP}$, obtemos sobre os eixos ortogonais os pontos P_1 e P_2.

O ponto P_1 é a projeção de P sobre o eixo vertical, e P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo horizontal.

O quadrilátero OP_2PP_1 é um retângulo, pois possui os quatro ângulos retos. Assim, temos:

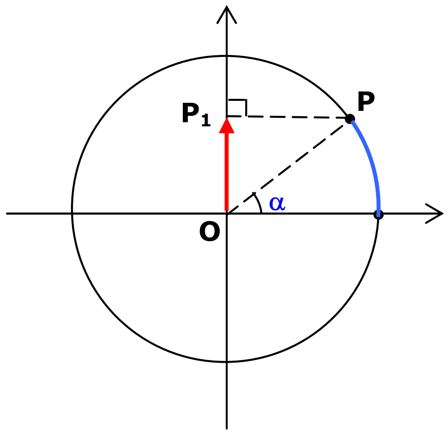
$$\overline{OP_1} = \overline{PP_2} \quad \text{e} \quad \overline{OP_2} = \overline{PP_1}$$



→ **Função Seno**

Observando a figura anterior, podemos escrever sen α = $\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{OP}}$ e, por conseqüência, sen α = $\overline{OP_1}$, pois $\overline{PP_2} = \overline{OP_1}$ e $\overline{OP}$ é unitário.

Assim, para encontrarmos o seno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente sua extremidade sobre o eixo vertical – daqui por diante denominado eixo dos senos – e medir a distância entre essa projeção e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (para cima).



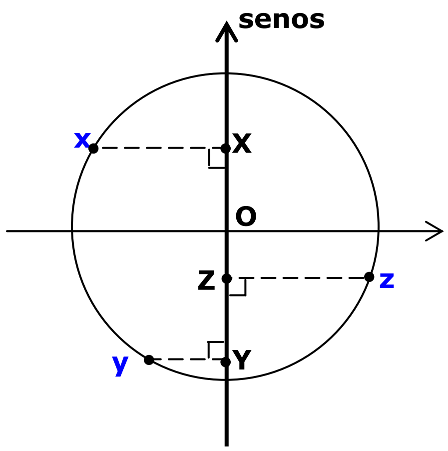
Para o caso dos ângulos fora do 1º quadrante, o procedimento é análogo. Na figura abaixo, sejam x, y e z os ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Projetando suas extremidades, obtemos, respectivamente, os pontos X, Y e Z.

Temos, então:

sen x = $\overline{OX}$ (positivo)

sen y = $\overline{OY}$ (negativo)

sen z = $\overline{OZ}$ (negativo)

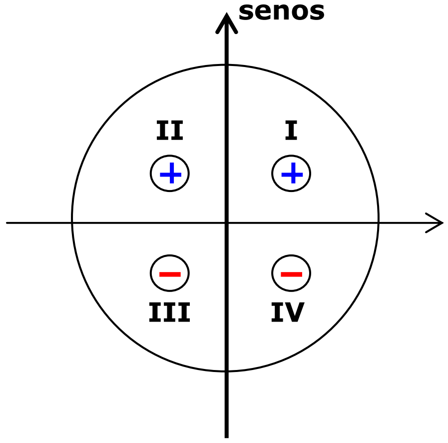


A função y = sen x

O domínio (os valores que x pode assumir) da função seno é igual ao conjunto dos reais. Sendo a unidade de x em radianos ou graus. Pelo ciclo trigonométrico constatamos que o seno de x é um valor no intervalo [-1, 1], ou seja, **-1** ≤ **sen x** ≤ **1**.

 # Sinais da função seno

Considerando a orientação do eixo dos senos, percebemos que os ângulos do 1º e 2º quadrantes associam-se valores positivos de senos, e a ângulos do 3º e 4º quadrantes associam-se valores negativos de senos.



 # Valores Notáveis

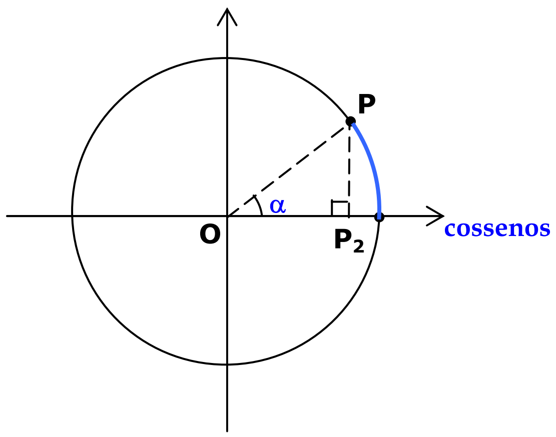
Os valores constantes na tabela abaixo são fundamentais, pois, a partir deles, são encontrados os valores dos senos de muitos outros ângulos.

x	**0**	**30º(π/6)**	**45º(π/4)**	**60º(π/3)**	**90º(π/2)**	**180º(π)**	**270º(3π/2)**	**360º(2π)**
sen x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0

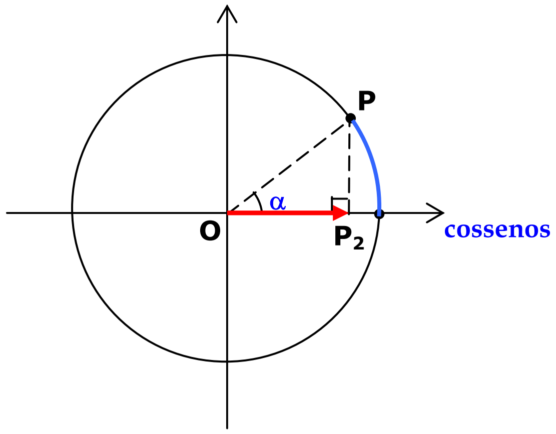
→ Função Cosseno

Na figura abaixo, utilizando o triângulo retângulo OPP_2, podemos escrever cos $\alpha = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP}}$.

Como $\overline{OP}$ é raio, temos cos $\alpha = \overline{OP_2}$.



Dessa forma, para encontramos o cosseno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente a extremidade do arco correspondente sobre o eixo horizontal – daqui por diante denominado eixo dos cossenos – e medir a distância entre essa projeção e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (para a direita).



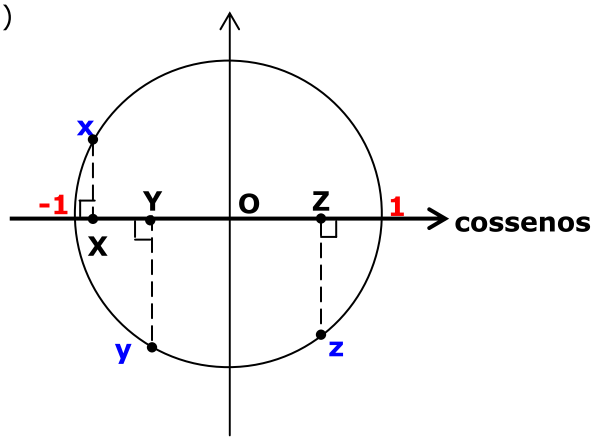
Para o caso dos ângulos fora do 1º quadrante, o procedimento é análogo. Na figura abaixo, sejam x, y e z os ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Projetando suas extremidades sobre o eixo dos cossenos, obtemos, respectivamente, os pontos X, Y e Z.

Temos, então:

cos x = $\overline{OX}$ (negativo)

cos y = $\overline{OY}$ (negativo)

cos z = $\overline{OZ}$ (positivo)

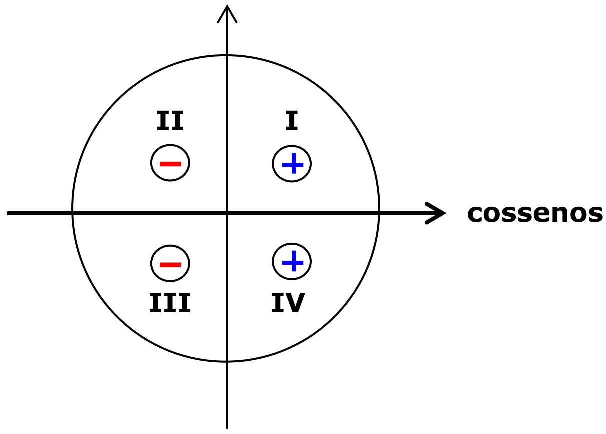


A função y = cos x

O domínio (os valores que x pode assumir) da função cosseno é igual ao conjunto dos reais. Sendo a unidade de x em radianos ou graus. Pelo ciclo trigonométrico constatamos que o cosseno de x é um valor no intervalo [-1, 1], ou seja, **-1** ≤ **cos x** ≤ **1**.

Sinais da função cosseno

Considerando a orientação do eixo dos cossenos, percebemos que os ângulos do 1º e 4º quadrantes associam-se valores positivos de cossenos, e a ângulos do 2º e 3º quadrantes associam-se valores negativos de cossenos.



Valores Notáveis

Os valores constantes na tabela abaixo são fundamentais, pois, a partir deles, são encontrados os valores dos cossenos de muitos outros ângulos.

x	**0**	**30º(π/6)**	**45º(π/4)**	**60º(π/3)**	**90º(π/2)**	**180º(π)**	**270º(3π/2)**	**360º(2π)**
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1

→ Relações entre senos e cossenos

No início desta aula vimos as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, onde foram apresentadas algumas relações entre senos e cossenos. Vamos retomá-las, agora de uma forma mais geral.

Ângulos Complementares

O complementar do ângulo x é o ângulo (90º –x).

E temos as seguintes relações entre ângulos complementares:

sen x = cos(90º–x) e **cos x = sen(90º–x)**

E significa que "o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento"; ou "o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complemento".

Relação Fundamental

Temos a seguinte relação entre o seno e o cosseno de um ângulo x qualquer.

$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, ou escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{sen^2x + cos^2x = 1}$$

Assim, dado o seno de um ângulo qualquer, é possível, por meio da relação acima, obter o cosseno desse mesmo ângulo, e vice-versa.

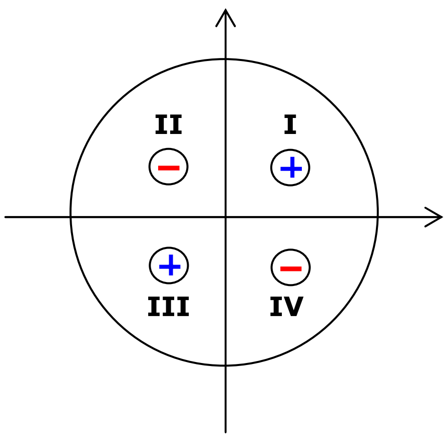
→ Função Tangente

Para obter os valores das **tangentes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

Quando o cosseno de x for zero a tangente não estará definida.

O sinal da função tangente pode ser obtida a partir do sinal das funções seno e cosseno. Como a tangente é dada pela razão entre o seno e o cosseno, ela será positiva quando o seno e o cosseno tiverem o mesmo sinal (1º quadrante e 3º quadrante) e será negativa quando o seno e o cosseno tiverem sinais diferentes (2º quadrante e 4º quadrante).



→ Função Cotangente

Para obter os valores das **cotangentes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$\cot g\ x = \frac{\cos x}{sen\ x} \quad \text{ou} \quad \cot g\ x = \frac{1}{tg\ x}$$

Quando o seno de x for zero a cotangente não estará definida.

O sinal da função cotangente é o mesmo da função tangente.

→ Função Secante

Para obter os valores das **secantes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Quando o cosseno de x for zero a secante não estará definida.

O sinal da função secante é o mesmo da função cosseno.

→ Função Cossecante

Para obter os valores das **cossecantes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$\cos\sec x = \frac{1}{sen\ x}$$

Quando o seno de x for zero a cossecante não estará definida.

O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno.

→ Valores Notáveis para as funções sen, cos, tg, cotg, sec e cossec

x	**sen x**	**cos x**	**tg x**	**cotg x**	**sec x**	**cossec x**
0º	0	1	0	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90º	1	0	--	0	--	1
180º	0	-1	0	--	-1	--
270º	-1	0	--	0	--	-1

→ Relações Importantes da Trigonometria

 # Relações Fundamentais:

As relações fundamentais permitem que, dado o valor de uma das funções circulares de um ângulo qualquer, encontremos os valores das demais funções circulares do mesmo ângulo (se existirem).

1) $sen^2x + cos^2x = 1$

2) $tg\ x = \dfrac{sen\ x}{\cos x}$

3) $\cot g\ x = \dfrac{1}{tg\ x}$

4) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

5) $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{sen\ x}$

 # Relações Decorrentes:

A partir das relações fundamentais, podemos deduzir outras relações, que são úteis na simplificação de expressões trigonométricas.

1) $tg^2 x + 1 = \sec^2 x$

2) $\cot g^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x$

 # Fórmulas de Multiplicação

Dadas as funções circulares de um ângulo x, é possível encontrarmos as funções circulares do ângulo 2x.

1) $\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$

2) $sen\ 2x = 2\, sen\ x \cos x$

Há diversas outras fórmulas trigonométricas, mas que não mostraremos aqui, pois para resolvermos as questões de trigonometria das provas de Raciocínio Lógico, bastam essas que foram apresentadas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE TRIGONOMETRIA

01. (AFC 2002 ESAF) A expressão dada por y = 4(cosseno x) + 4 é definida para todo número x real. Assim, o intervalo de variação de y é:

a) $-4 \le y \le 8$
b) $0 < y \le 8$
c) $-\infty \le y \le \infty$
d) $0 \le y \le 4$
e) $0 \le y \le 8$

Sol.:

A expressão fornecida no enunciado envolve a função cosseno. Assim, encontraremos o intervalo de variação de y, a partir do intervalo de variação da função cosseno.

Da função cosseno sabemos que o seu intervalo de variação é: [-1, 1], ou seja, o valor máximo é 1, e o valor mínimo é -1. E podemos escrever que:

$$\mathbf{\cos x \geq -1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\cos x \leq 1}$$

A partir da expressão **cos x ≥ -1**, obteremos uma expressão de variação de y.

Temos que cos x ≥ -1 , se multiplicarmos por **4** ambos os lados, obteremos:

$$\mathbf{4.\cos x \geq 4.(-1)}$$

Daí:

$$\mathbf{4\cos x \geq -4}$$

Se somarmos 4 a ambos os lados da expressão acima, teremos:

$$\mathbf{4\cos x + 4 \geq -4 + 4}$$

Daí:

$$\mathbf{4\cos x + 4 \geq 0}$$

E como y=4cos x +1, então encontramos que **y ≥ 0**.

Agora, a partir da expressão **cos x ≤ 1**, obteremos uma outra expressão de variação de y.

Temos que cos x ≤ 1, se multiplicarmos por **4** ambos os lados, obteremos:

$$\mathbf{4.\cos x \leq 4.1}$$

Daí:

$$\mathbf{4\cos x \leq 4}$$

Se somarmos 4 a ambos os lados da expressão acima, teremos:

$$\mathbf{4\cos x + 4 \leq 4 + 4}$$

Daí:

$$\mathbf{4\cos x + 4 \leq 8}$$

E como y=4cos x +1, então encontramos que **y ≤ 8**.

Dos resultados obtidos: **y ≥ 0** e **y ≤ 8**, encontramos o intervalo de variação de y:

0 ≤ y ≤ 8 (Resposta!)

02. (TFC 1995 ESAF) Se x é um arco do segundo quadrante e sen x = 4/5, então cos x é:

a) -5/3
b) 5/3
c) ± 3/5
d) 3/5
e) -3/5

Sol.:

O enunciado informa que x é um ângulo do segundo quadrante, e de acordo com o sinal da função cosseno, temos que o cosseno de x é negativo. Assim, a alternativa correta ou é a A ou é a E.

Pela relação fundamental: $sen^2x + \cos^2x = 1$, podemos encontrar o valor do cosseno de x a partir do conhecimento do seno de x.

Temos que sen x = 4/5, substituindo esse valor na relação fundamental acima, teremos:

→ $(4/5)^2 + \cos^2x = 1$ → $16/25 + \cos^2x = 1$ → $\cos^2x = 1 - 16/25$

→ $\cos^2x = 9/25$ → $\cos x = \sqrt{9/25}$ → $\cos x = \pm 3/5$

No início dessa solução, já havíamos concluído que o cos x devia ser negativo. Portanto, descartaremos o valor de +3/5, e a resposta será:

cos x = –3/5 (Resposta!)

03. (Esp. em Pol. Públicas e Gestão Governamental MPOG/2000 ESAF) Sabe-se que o seno de 60º é igual a ($3^{1/2}$)/2, e que co-seno de 60º é igual a ½. Sabe-se, também, que o seno do dobro de um ângulo α é igual ao dobro do produto do seno de α pelo co-seno de α. Assim, a tangente do ângulo suplementar a 60^0 é:

a) - ½
b) - ($3^{1/2}$)
c) $3^{1/2}$
d) ($3^{1/2}$)/2
e) - ($3^{1/2}$)/2

Sol.:

Dois ângulos são considerados suplementares, se a soma deles é igual a 180º (x+y=180º). Então o suplemento de um ângulo x é o ângulo (180º-x). Dessa forma, o ângulo suplementar a 60º é:

120º (=180º–60º)

A partir desse resultado e de acordo com o enunciado, devemos calcular a tangente de 120º para encontrarmos a resposta da questão. Para calcular esta tangente usaremos os outros dados fornecidos no enunciado, que são:

1ª) sen 60º = ($3^{1/2}$)/2
2ª) cos 60º = 1/2
3ª) sen 2α = 2.senα.cosα

A tangente pode ser calculada a partir do seno e do cosseno, pela seguinte fórmula:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

Então tangente de 120º é igual a:

$$tg\ 120^o = \frac{sen\ 120^o}{\cos 120^o}$$

Devemos encontrar o valor do seno e do cosseno de 120º.

O sen 120º pode ser obtido usando-se a fórmula sen 2α = 2.senα.cosα , fazendo α=60º. Teremos:

→ sen 120º= 2.sen60º.cos60º → sen 120º= 2 . ($3^{1/2}$)/2 . 1/2

→ **sen 120º= ($3^{1/2}$)/2**

Podemos calcular o cos 120º a partir da relação fundamental: $sen^2x + cos^2x = 1$. Teremos:

→ $sen^2x + cos^2x = 1$ → $(sen120º)^2 + (cos120º)^2 = 1$

→ $((3^{1/2})/2)^2 + cos^2 120º = 1$ → $3/4 + cos^2 120º = 1$

→ $cos^2 120º = 1/4$ → $\cos 120º = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$ → cos 120º = ± 1/2

O cos 120º é positivo ou negativo? O ângulo de 120º está no 2º quadrante, daí o cos 120º é negativo. Daí:

→ **cos 120º = -1/2**

Encontrados os valores do seno e do cosseno de 120º, já podemos obter o valor da tangente de 120º, teremos:

→ $tg\,120° = \dfrac{sen\,120°}{\cos 120°}$ → $tg\,120° = \dfrac{(3^{1/2})/2}{-1/2}$

E, finalmente: **tg 120º = - ($3^{1/2}$)** → **Resposta: alternativa b.**

04. (AFTN 1998/ESAF) O valor de y para o qual a expressão trigonométrica: (cosx + senx)^2 + y senx cosx - 1 = 0 representa uma identidade é:

a) 2
b) 0
c) -1
d) -2
e) 1

Sol.:

Uma identidade trigonométrica é uma igualdade que se verifica para quaisquer valores atribuídos a variável envolvida nas funções trigonométricas.

Na expressão do enunciado, temos a variável x envolvida com as funções seno e cosseno.

Vamos desenvolver o termo (cosx + senx)^2 que aparece na expressão dada no enunciado. Teremos:

→ (cosx + senx)^2 = cos^{2}x + 2.cosx.senx + sen^{2}x

→ (cosx + senx)^2 = **sen^{2}x + cos^{2}x** + 2.cosx.senx

→ (cosx + senx)^2 = **1** + 2.cosx.senx

Substituindo o termo (cosx + senx)^2 por **1+2.cosx.senx** na expressão dada no enunciado, teremos:

→ **1+2.cosx.senx** + ysenx.cosx - 1 = 0

→ 2.cosx.senx + ysenx.cosx = 0

Colocando em evidência o termo **senx.cosx** , teremos:

→ senx.cosx (2 + y) = 0

Se (2+y) for igual a zero, então para qualquer valor de x a expressão acima será verificada, daí:

→ (2+y)=0 → **y=−2 (Resposta!)**

05. (AFC 2005 ESAF) O sistema dado pelas equações

$$\begin{cases} x \text{ sen } a - y \cos a = -\cos 2a \\ x \cos a + y \text{ sen } a = \text{sen } 2a \end{cases}$$

possui duas raízes, x e y. Sabendo-se que "a" é uma constante, então a soma dos quadrados das raízes é igual a

a) 1
b) 2
c) 4
d) sen π
e) cos π

Sol.:

A questão afirma que x e y são as raízes do sistema. Então a soma dos quadrados das raízes, solicitada na questão, será dada por:

$$\mathbf{x^2 + y^2}$$

Para que apareça nas equações do sistema os valores de $\mathbf{x^2}$ e $\mathbf{y^2}$, devemos elevar ao quadrado ambos os lados das equações do sistema. Assim, teremos:

→ $\begin{cases} (x.\text{sen } a - y.\cos a)^2 = (-\cos 2a)^2 \\ (x.\cos a + y.\text{sen } a)^2 = (\text{sen } 2a)^2 \end{cases}$

→ $\begin{cases} (x.\text{sen } a)^2 - 2(x.\text{sen } a)(y.\cos a) + (y.\cos a)^2 = (-\cos 2a)^2 \\ (x.\cos a)^2 + 2(x.\cos a)(y.\text{sen } a) + (y.\text{sen } a)^2 = (\text{sen } 2a)^2 \end{cases}$

→ $\begin{cases} x^2.\text{sen}^2 a - 2xy.\text{sen } a.\cos a + y^2\cos^2 a = \cos^2 2a \\ x^2.\cos^2 a + 2xy.\cos a.\text{sen } a + y^2.\text{sen}^2 a = \text{sen}^2 2a \end{cases}$

Somando membro a membro as duas equações do sistema, teremos:

→ $x^2.\text{sen}^2 a + x^2.\cos^2 a + 0 + y^2\cos^2 a + y^2.\text{sen}^2 a = \cos^2 2a + \text{sen}^2 2a$

→ $x^2(\text{sen}^2 a + \cos^2 a) + y^2(\cos^2 a + \text{sen}^2 a) = \cos^2 2a + \text{sen}^2 2a$

→ $x^2(1) + y^2(1) = 1$

→ $x^2 + y^2 = 1$

Resposta: A soma dos quadrados das raízes é igual a 1.

Dever de Casa

01.(AFC-STN-2000 ESAF) A expressão dada por y = 3senx + 4 é definida para todo número x real. Assim, o intervalo de variação de y é
a) $-1 \le y \le 7$
b) $-7 < y < 1$
c) $-7 < y \le -1$
d) $1 \le y < 7$
e) $1 \le y \le 7$

02. A expressão dada por y = −2senx + 5 é definida para todo número x real. Assim, o intervalo de variação de y é
a) $-1 \le y \le 7$
b) $y \le 3$ ou $y \ge 7$
c) $3 < y \le 5$
d) $3 \le y \le 8$
e) $3 \le y \le 7$

03.(TFC 1995 ESAF) Simplificando a expressão (sen a. tg a. cossec a) / (cos a. cotg a. sec a), obtém-se:
a) 0
b) 1
c) $\text{sen}^2 a$
d) $\sec^2 a$
e) $\text{tg}^2 a$

04.(SERPRO 1996 ESAF) Se sen x = 0,5, então (1 / cotg x) vale:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}/3$

c) $2/\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}/2$

e) $\sqrt{3}/4$

05.(MPOG 2003 ESAF) Sabendo que x é o ângulo correspondente a um arco do segundo quadrante, e que seno de x é igual a 12/13, então a tangente de x é igual a:

a) –12/5
b) –10/13
c) 10/13
d) 12/13
e) 12/5

06.(Especialista em Pol. Públicas e Gestão Governamental MPOG 2002 ESAF) Sabe-se que a função inversa da função seno é a função cossecante e que o seno do dobro de um arco é dado por sen 2x = 2sen x cos x. Sabendo-se que x é um arco do segundo quadrante e que o cosseno da metade deste arco é igual a 1/3, então a cossecante de x vale:

a) – 2
b) 0
c) -1
d) 2
e) 1

07.(TFC 1997 ESAF) Sabe-se que o seno do dobro de um ângulo α é igual ao dobro do produto do seno de α pelo co-seno de α. Assim, sendo o seno de um ângulo de 120º igual a $\sqrt{3}/2$, o seno de um ângulo de 240º é:

a) $-\sqrt{3}/2$
c) $\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3}/2$
d) $2\sqrt{3}$

08.(AFC-SFC 2001 ESAF) A condição necessária e suficiente para a identidade sen2α = 2senα ser verdadeira é que α seja, em radianos, igual a:

a) $\pi/3$
b) $\pi/2$
c) n π sendo n um número inteiro qualquer
d) n $\pi/2$, sendo n um número inteiro qualquer
e) n $\pi/3$,sendo n um número inteiro qualquer

09.(SERPRO 1996 ESAF) Sendo p uma constante real, os valores de x e de y que solucionam o sistema:

$$\begin{cases} x.\text{sen } p - y.\cos p = -\cos 2p \\ x.\cos p + y.\text{sen } p = \text{sen } 2p \end{cases}$$

a) (sen p,cos p)
b) (sen 2,cos 2p)
c) (sen 2p,cos p)
d) (sen p,-cos p)
e) (-sen p,-cos 2p)

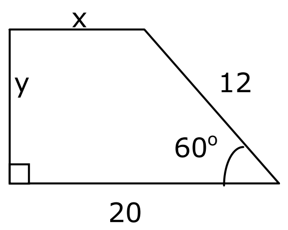
10.(Oficial de Chancelaria MRE 2002 ESAF) Sabendo que x = 3sent e y = 4cost, então, uma relação entre x e y, independente de t é dada por:

a) $16 y^2 - 9 x^2 = 144$
b) $16 x^2 - 9 y^2 = 144$
c) $16 y^2 + 9 x^2 = 144$
d) $16 x^2 + 9 y^2 = 144$
e) $9 y^2 - 16 x^2 = 144$

11. Simplificando a expressão $\frac{tgx.\cot gx}{\sec^2 x - 1}$, obteremos:

a) $\sec^2 x$
b) $\cot g^2 x$
c) $tg^2 x$
d) $\cos\sec^2 x$
e) $\cos^2 x$

12. Determine o valor de x e y nas figuras abaixo:



GABARITO

01	e	06	a	11	b
02	e	07	a	12	X=14 e y=6(3)$^{1/2}$
03	b	08	c		
04	b	09	a		
05	a	10	d		