AULA DEZESSETE: GEOMETRIA BÁSICA

Olá, amigos!

Novamente pedimos desculpas por não ter sido possível apresentarmos esta aula 17 na semana passada.

Daremos hoje início a um novo assunto: GEOMETRIA!

Como de praxe, apresentaremos muitas questões de concursos passados que servirão no nosso aprendizado, e também para sabermos qual é a profundidade exigida deste assunto dentro das provas de Raciocínio Lógico.

Apresentaremos a seguir, a solução do *dever de casa* da aula passada, sobre o assunto de Trigonometria. Vamos a elas!

DEVER DE CASA

01.(AFC-STN-2000 ESAF) A expressão dada por y = 3senx + 4 é definida para todo número x real. Assim, o intervalo de variação de y é

a) $-1 \leq y \leq 7$
b) $-7 < y < 1$
c) $-7 < y \leq -1$
d) $1 \leq y < 7$
e) $1 \leq y \leq 7$

Sol.:

A expressão fornecida no enunciado envolve a função seno. Assim, encontraremos o intervalo de variação de y, a partir do intervalo de variação da função seno.

Da função seno, sabemos que o seu intervalo de variação é: [-1, 1], ou seja, o valor máximo é 1, e o valor mínimo é -1. E podemos escrever que:

$$\mathbf{sen\ x \geq -1} \quad \text{e} \quad \mathbf{sen\ x \leq 1}$$

A partir da expressão **sen x ≥ -1**, obteremos uma expressão de variação de y.

Temos que **sen x ≥ -1** , se multiplicarmos por **3** ambos os lados, obteremos:

$$3.\text{sen } x \geq 3.(-1)$$

Daí:

$$3\text{sen } x \geq -3$$

Se somarmos 4 a ambos os lados da expressão acima, teremos:

$$3\text{sen } x + 4 \geq -3 + 4$$

Daí:

$$3\text{sen } x + 4 \geq 1$$

E como y=3sen x +4, então encontramos que **y ≥ 1**.

Agora, a partir da expressão **sen x ≤ 1**, obteremos uma outra expressão de variação de y.

Temos que **sen x ≤ 1**, se multiplicarmos por **4** ambos os lados, obteremos:

$$3.\text{sen } x \leq 3.1$$

Daí:

$$3\text{sen } x \leq 3$$

Se somarmos 4 a ambos os lados da expressão acima, teremos:

$$3\text{sen } x + 4 \leq 3 + 4$$

Daí:

$$3\text{sen } x + 4 \leq 7$$

E como y=3sen x +4, então encontramos que **$y \leq 7$**.

Dos resultados obtidos: **$y \geq 1$** e **$y \leq 7$**, encontramos o intervalo de variação de y:

$$1 \leq y \leq 7 \text{ (Resposta!)}$$

02. A expressão dada por y = −2senx + 5 é definida para todo número x real. Assim, o intervalo de variação de y é

a) $-1 \leq y \leq 7$
b) $y \leq 3$ ou $y \geq 7$
c) $3 < y \leq 5$
d) $3 \leq y \leq 8$
e) $3 \leq y \leq 7$

Sol.:

A expressão fornecida no enunciado envolve a função seno. Assim, encontraremos o intervalo de variação de y, a partir do intervalo de variação da função seno.

Da função seno, sabemos que o seu intervalo de variação é: [-1, 1], ou seja, o valor máximo é 1, e o valor mínimo é -1. E podemos escrever que:

$$\textbf{sen } x \geq -1 \quad \text{e} \quad \textbf{sen } x \leq 1$$

A partir da expressão **$\text{sen } x \geq -1$**, obteremos uma expressão de variação de y.

Temos que **$\text{sen } x \geq -1$** , se multiplicarmos por **-2** ambos os lados, obteremos:

$$-2.\text{sen } x \leq -2.(-1)$$

Observe que o sinal inverteu, era um sinal de "maior" e passou para um sinal de "menor", isso ocorreu porque multiplicamos por um valor negativo (-2).

Continuando, teremos: $$-2\text{sen } x \leq 2$$

Se somarmos 5 a ambos os lados da expressão acima, teremos:

$$-2\text{sen } x + 5 \leq 2 + 5$$

Daí:

$$-2\text{sen } x + 5 \leq 7$$

E como **y=-2sen x +5**, então encontramos que **$y \leq 7$**.

Agora, a partir da expressão **$\text{sen } x \leq 1$**, obteremos uma outra expressão de variação de y.

Temos que **$\text{sen } x \leq 1$**, se multiplicarmos por **-2** ambos os lados, obteremos:

$$-2.\text{sen } x \geq -2.1$$

Novamente, invertemos o sinal, agora de menor para maior, porque multiplicamos por um valor negativo (-2).

Continuando, teremos: $$-2\text{sen } x \geq -2$$

Se somarmos 5 a ambos os lados da expressão acima, teremos:

$$-2\text{sen } x + 5 \geq -2 + 5$$

Daí:

$$-2\text{sen } x + 5 \geq 3$$

E como **y=-2sen x +5**, então encontramos que **$y \geq 3$**.

Dos resultados obtidos: **$y \geq 3$** e **$y \leq 7$**, encontramos o intervalo de variação de y:

$$3 \leq y \leq 7 \text{ (Resposta!)}$$

03.(TFC 1995 ESAF) Simplificando a expressão (sen a. tg a. cossec a) / (cos a. cotg a. sec a), obtém-se:

a) 0
b) 1
c) $sen^2 a$
d) $sec^2 a$
e) $tg^2 a$

Sol.:

O que temos que fazer para resolver esta questão é substituir as funções: tg, cossec, cotg e sec, pelas funções seno e cosseno.

Sabemos que: $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$, $\cot g\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e $\cos\sec x = \frac{1}{sen\ x}$.

A expressão dada no enunciado é: (sen a. tg a. cossec a) / (cos a. cotg a. sec a), se colocarmos tudo em função do seno e cosseno, teremos:

→ (sen a. $\frac{sen\ a}{\cos a}$. $\frac{1}{sen\ a}$) / (cos a. $\frac{\cos a}{sen\ a}$. $\frac{1}{\cos a}$)

→ (~~sen a~~. $\frac{sen\ a}{\cos a}$. $\frac{1}{\cancel{sen\ a}}$) / (~~cos a~~. $\frac{\cos a}{sen\ a}$. $\frac{1}{\cancel{\cos a}}$)

→ ($\frac{sen\ a}{\cos a}$ / $\frac{\cos a}{sen\ a}$)

→ ($\frac{sen\ a}{\cos a}$ x $\frac{sen\ a}{\cos a}$)

→ ($\frac{sen^2 a}{\cos^2 a}$) → ($tg^2 a$) (**Resposta: alternativa E**)

04.(SERPRO 1996 ESAF) Se sen x = 0,5, então (1 / cotg x) vale:

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3}/3$
c) $2/\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}/2$
e) $\sqrt{3}/4$

Sol.:

É bom iniciarmos a solução da questão definindo os quadrantes em que o ângulo x pode estar. Como senx=0,5 , temos que o seno é positivo, daí o ângulo x pode está no 1º quadrante ou no 2º quadrante.

A expressão dada no enunciado é: (1 / cotg x) , e sabemos que $\cot g\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$. Daí, se colocarmos a cotangente em função do seno e cosseno, teremos:

→ (1 / $\frac{\cos x}{sen\ x}$) → ($\frac{sen\ x}{\cos x}$)

Para descobrirmos o valor da expressão acima, temos que achar o cosseno de x.

Pela relação fundamental: $sen^2x + cos^2x = 1$, podemos encontrar o valor do cosseno de x a partir do valor do seno de x.

Temos que senx=1/2, substituindo esse valor na relação fundamental acima, teremos:

→ $(1/2)^2 + cos^2x = 1$ → $1/4 + cos^2x = 1$ → $cos^2x = 1 - 1/4$

→ $cos^2x = 3/4$ → $\cos x = \sqrt{3/4}$ → $\cos x = \pm \sqrt{3}/2$

Obtemos dois valores para o cosseno de x, um positivo e outro negativo. Agora, temos que analisar qual destes devemos escolher.

No início dessa solução, vimos que o ângulo x poderia estar no 1º quadrante ou no 2º quadrante. Daí, faremos duas análises:

→ O valor do cosseno no 1º quadrante é positivo, daí se o x está no 1º quadrante, então devemos escolher o valor positivo: **cos x =** $\sqrt{3}$ **/2**.

→ O valor do cosseno no 2º quadrante é negativo, daí se o x está no 2º quadrante, então devemos escolher o valor negativo: **cos x = -** $\sqrt{3}$ **/2**.

A questão solicita o valor da expressão (1 / cotg x), que como já vimos é igual a: $\frac{sen\,x}{\cos x}$. Substituiremos os valores do seno e cosseno nesta expressão.

→ Para senx=1/2 e cosx=$\sqrt{3}$/2, teremos:

$$\frac{sen\,x}{\cos x} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ (**resposta para x no 1º quadrante**)

→ Para senx=1/2 e cosx= -$\sqrt{3}$/2, teremos:

$$\frac{sen\,x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$ (**resposta para x no 2º quadrante**)

Portanto, temos duas respostas, porém a única que aparece nas alternativas é a resposta $\frac{\sqrt{3}}{3}$. E é claro, devemos marcar a **alternativa B**.

A questão deveria ter definido qual era o quadrante de x para que tivéssemos somente uma resposta!

05.(MPOG 2003 ESAF) Sabendo que x é o ângulo correspondente a um arco do segundo quadrante, e que seno de x é igual a 12/13, então a tangente de x é igual a:

a) −12/5
b) −10/13
c) 10/13
d) 12/13
e) 12/5

Sol.:

O enunciado informa que x é um ângulo do segundo quadrante, portanto a tangente de x é um valor negativo. Assim, a alternativa correta ou é a A ou é a B.

Pela relação fundamental: $sen^2x + cos^2x = 1$, podemos encontrar o valor do cosseno de x a partir do valor do seno de x.

Temos que senx=12/13, substituindo esse valor na relação fundamental acima, teremos:

→ $(12/13)^2 + cos^2x = 1$ → $144/169 + cos^2x = 1$ → $cos^2x = 1 - 144/169$

→ $cos^2x = 25/169$ → $\cos x = \sqrt{25/169}$ → $\cos x = \pm 5/13$

No início dessa solução, já havíamos concluído que o cos x devia ser negativo. Portanto, descartaremos o valor de +3/5, e a resposta será:

cos x = –3/5 (Resposta!)

06.(Especialista em Pol. Públicas e Gestão Governamental MPOG 2002 ESAF) Sabe-se que a função inversa da função seno é a função cossecante e que o seno do dobro de um arco é dado por sen 2x = 2sen x cos x. Sabendo-se que x é um arco do segundo quadrante e que o cosseno da metade deste arco é igual a 1/3, então a cossecante de x vale:

a) $\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

e) 1

Sol.:

O enunciado afirma que a função inversa da função seno é a função cossecante, isto quer dizer que:

cossec x = 1 / sen x

Também o enunciado traz as seguintes informações:

→ **sen 2x = 2senx . cosx**
→ x é um arco do segundo quadrante
→ cos(x/2) = 1/3

Para calcularmos a cossecante de x, devemos obter primeiramente o valor do sen x. Para isso, vamos utilizar as informações dadas no enunciado.

A equação **sen 2x = 2senx.cosx** pode ser escrita de maneira diferente, mas equivalente, da seguinte forma: **sen x = 2sen(x/2) . cos(x/2)**.

Desta última expressão, observamos que já temos o cos(x/2) e para calcularmos o senx, necessitamos encontrar o valor do sen(x/2). Faremos isso através da relação fundamental: $sen^2x + cos^2x = 1$.

Podemos escrever a relação fundamental acima da seguinte forma: $sen^2(x/2)+cos^2(x/2)=1$. Substituiremos o valor de cos(x/2) nesta expressão.

→ $\text{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)=1$ → $\text{sen}^2(x/2) + (1/3)^2 = 1$

→ $\text{sen}^2(x/2) = 1 - 1/9$ → $\text{sen}^2(x/2) = 8/9$

→ $\text{sen}(x/2) = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$ → $\text{sen}(x/2) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

O seno de x/2 é positivo ou negativo? Como o x é um arco do 2º quadrante, então x/2 será do 1º quadrante e, portanto, o seno de x/2 é positivo. Daí, descartamos o valor negativo acima e ficamos com:

$$\text{sen}(x/2) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Agora é só substituir o valor do sen(x/2) e do cos(x/2) na expressão abaixo para encontrarmos o valor do senx.

→ $\text{sen } x = 2\text{sen}(x/2) \,.\, \cos(x/2)$ → $\text{sen } x = 2 \,.\, \frac{2\sqrt{2}}{3} \,.\, \frac{1}{3}$

→ $\text{sen } x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

Daí, cossecante de x é igual a:

→ $\text{cossec } x = 1 / \text{sen } x$ → $\text{cossec } x = 1 / \frac{4\sqrt{2}}{9}$

→ $\text{cossec } x = \frac{9}{4\sqrt{2}}$ → $\text{cossec } x = \frac{9\sqrt{2}}{8}$ (**Resposta!**)

Observe que esta resposta não aparece entre as alternatives, foi por este motivo que a ESAF teve que anular esta questão.

07.(TFC 1997 ESAF) Sabe-se que o seno do dobro de um ângulo α é igual ao dobro do produto do seno de α pelo co-seno de α. Assim, sendo o seno de um ângulo de 120º igual a $\sqrt{3}/2$, o seno de um ângulo de 240º é:

a) $-\sqrt{3}/2$
b) $\sqrt{3}/2$
c) $\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$

Sol.:

E enunciado traz a seguinte informação: sen 2α = 2senα.cosα. Nesta expressão, fazendo α igual a 120º, podemos obter o seno de 240º.

→ sen 240º = 2.sen120º.cos120º

Falta calcular o valor do seno de 120º. Usaremos a relação fundamental: $\text{sen}^2x+\cos^2x=1$.

→ $\text{sen}^2 120º + \cos^2 120º = 1$ → $(\sqrt{3}/2)^2 + \cos^2 120º = 1$

→ $\cos^2 120º = 1 - 3/4$ → $\cos^2 120º = 1/4$

→ $\cos 120º = \pm\sqrt{1/4}$ → $\cos 120º = \pm 1/2$

O cosseno de 120º é positivo ou negativo? Como o ângulo de 120º é do 2º quadrante, então o cosseno de 120º é negativo. Daí, descartamos o valor positivo acima e ficamos com:

cos 120º = –1/2

De posse do seno e do cosseno de 120º, já podemos obter o seno de 240º. Teremos:

→ sen 240º = 2.sen120º.cos120º → sen 240º = 2. $\sqrt{3}/2$.(–1/2)

→ sen 240º = – $\sqrt{3}/2$ (**Resposta!**)

08.(AFC-SFC 2001 ESAF) A condição necessária e suficiente para a identidade sen2α = 2senα ser verdadeira é que α seja, em radianos, igual a:

a) π/3
b) π/2
c) n π sendo n um número inteiro qualquer
d) n π/2, sendo n um número inteiro qualquer
e) n π/3 ,sendo n um número inteiro qualquer

Sol.:

Uma das fórmulas apresentadas na aula dezesseis, e que já usamos em algumas questões resolvidas acima, foi esta:

$$sen\ 2x = 2\, sen\ x \cos x$$

Assim o valor de sen2α = 2senα.cosα . Substituiremos o valor de sen2α na expressão dada no enunciado da questão.

→ **sen2**α = 2senα

→ **2sen**α**cos**α = 2senα

→ 2senαcosα – 2senα = 0

→ 2senα(cosα – 1) = 0

O valor de α que satisfaz esta última expressão, pode ser obtido fazendo-se:

2senα**=0** ou **(cos**α **– 1)=0**

1) Vamos calcular os valores de α para que 2senα=0.

→ 2senα=0 → **sen**α**=0**

O seno é igual a zero para os arcos 0, ±π, ±2π, ±3π, ... Generalizando:

α **= k**π , onde k = 0, ±1, ±2, ...

2) Vamos calcular os valores de α para que (cosα – 1) = 0.

→ (cosα – 1) = 0 → **cos**α **= 1**

O cosseno é igual a um para os arcos 0, ±2π, ±4π, ... Generalizando:

α **= k.2**π , onde k = 0, ±1, ±2, ...

Resumindo:

→ Para que **2sen**α **= 0** , devemos ter α **= k**π , onde k é um inteiro qualquer.

→ Para que **(cos**α**−1)=0** , devemos ter α **= k.2**π , onde k é um inteiro qualquer.

A solução é: α **= k**π ou α **= k.2**π , mas como α**=k**π também abrange os valores de α**=k.2**π , então podemos dizer que a solução é simplesmente:

α **= k**π , onde k é um inteiro qualquer (**Resposta: alternativa C**)

09.(SERPRO 1996 ESAF) Sendo p uma constante real, os valores de x e de y que solucionam o sistema:

$$\begin{cases} x.\text{sen } p - y.\cos p = -\cos 2p \\ x.\cos p + y.\text{sen } p = \text{sen } 2p \end{cases}$$

a) (sen p,cos p)
b) (sen 2,cos 2p)
c) (sen 2p,cos p)
d) (sen p,-cos p)
e) (-sen p,-cos 2p)

Sol.:

Os valores de x e de y são as raízes do sistema.

Devemos elevar ao quadrado ambos os lados das equações do sistema, para que possamos utilizar a relação fundamental: $\text{sen}^2p+\cos^2p=1$, e, assim, teremos:

→ $\begin{cases} (x.\text{sen } p - y.\cos p)^2 = (-\cos 2p)^2 \\ (x.\cos p + y.\text{sen } p)^2 = (\text{sen } 2p)^2 \end{cases}$

→ $\begin{cases} (x.\text{sen } p)^2 - 2(x.\text{sen } p)(y.\cos p) + (y.\cos p)^2 = (-\cos 2p)^2 \\ (x.\cos p)^2 + 2(x.\cos p)(y.\text{sen } p) + (y.\text{sen } p)^2 = (\text{sen } 2p)^2 \end{cases}$

→ $\begin{cases} x^2.\text{sen}^2p - 2xy.\text{sen } p.\cos p + y^2\cos^2p = \cos^2 2p \\ x^2.\cos^2p + 2xy.\cos p.\text{sen } p + y^2.\text{sen}^2p = \text{sen}^2 2p \end{cases}$

Somando membro a membro as duas equações do sistema, teremos:

→ $x^2.\text{sen}^2p + x^2.\cos^2p + 0 + y^2\cos^2p + y^2.\text{sen}^2p = \cos^2 2p + \text{sen}^2 2p$

→ $x^2(\text{sen}^2p + \cos^2p) + y^2(\cos^2p + \text{sen}^2p) = \cos^2 2p + \text{sen}^2 2p$

→ $x^2(1) + y^2(1) = 1$

→ $x^2 + y^2 = 1$

Os únicos valores de x e de y que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ são os que são apresentados na alternativa A e D, mas se substituímos o valor de x e de y da alternativa d na segunda equação do sistema, verificaremos facilmente que estes valores não servem. Daí, resposta: **alternativa A**.

10.(Oficial de Chancelaria MRE 2002 ESAF) Sabendo que x = 3sent e y = 4cost, então, uma relação entre x e y, independente de t é dada por:

a) $16y^2 - 9x^2 = 144$
b) $16x^2 - 9y^2 = 144$
c) $16y^2 + 9x^2 = 144$
d) $16x^2 + 9y^2 = 144$
e) $9y^2 - 16x^2 = 144$

Sol.:

Devemos elevar ao quadrado os valores de x e de y, para que possamos utilizar a relação fundamental: $sen^2t+cos^2t=1$. Fazendo isso, teremos:

→ $x = 3sent$ → $x^2 = (3sent)^2$ → $\mathbf{x^2 = 9sen^2t}$ **(1)**

→ $y = 4cost$ → $y^2 = (4cost)^2$ → $\mathbf{y^2 = 16cos^2t}$ **(2)**

Para que apareça a relação $\mathbf{sen^2t+cos^2t=1}$, devemos multiplicar a 1ª equação por 16 e a 2ª equação por 9, e depois somarmos as duas.

→ $\mathbf{16x^2 = 16.9sen^2t}$ → $\mathbf{16x^2 = 144sen^2t}$

→ $\mathbf{9y^2 = 9.16cos^2t}$ → $\mathbf{9y^2 = 144cos^2t}$

Somando, membro a membro, teremos:

→ $\mathbf{16x^2 + 9y^2 = 144sen^2t + 144cos^2t}$

→ $\mathbf{16x^2 + 9y^2 = 144(sen^2t + cos^2t)}$

→ $\mathbf{16x^2 + 9y^2 = 144}$ (**Resposta: alternativa D**)

11.Simplificando a expressão $\frac{tgx.\cot gx}{\sec^2 x - 1}$, obteremos:

a) $\sec^2 x$
b) $\cot g^2 x$
c) $tg^2 x$
d) $\cos\sec^2 x$
e) $\cos^2 x$

Sol.:

Da aula dezesseis, temos as seguintes fórmulas que usaremos na solução dessa questão, são elas:

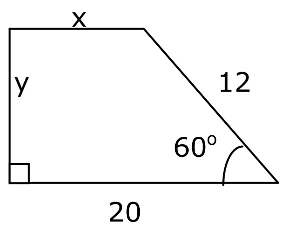
→ cotgx = 1/tgx

→ $tg^2x + 1 = \sec^2 x$

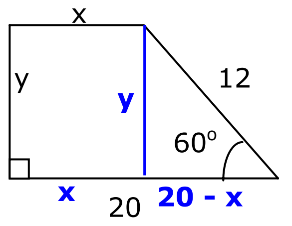
Substituindo essas fórmulas na expressão do enunciado, teremos:

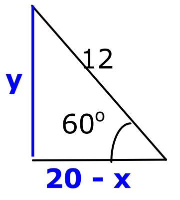
→ $\frac{tgx.\cot gx}{\sec^2 x - 1}$ → $\frac{tgx.\frac{1}{tgx}}{tg^2x}$ → $\frac{1}{tg^2x}$ → $\cot g^2 x$ (**Resposta: alternativa B**)

12.Determine o valor de x e y nas figuras abaixo:



Sol.:





Sabemos que: sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e que cos 60º = ½.

1) Cálculo de y

→ sen 60º = cateto oposto / hipotenusa

→ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = y / 12 → **y =** $6\sqrt{3}$

2) Cálculo de x

→ cos 60º = cateto adjacente / hipotenusa

→ 1/2 = (20-x) / 12 → (20-x) = 6

→ **x = 14**

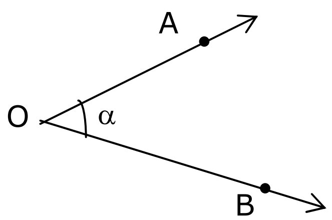
Agora, sim, falaremos sobre Geometria!

GEOMETRIA

1. ÂNGULOS

1.1. Definição

Ângulo é o nome que se dá à abertura formada por duas semi-retas que partem de um mesmo ponto.



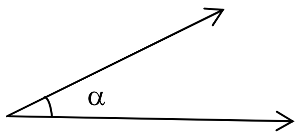
Indica-se por: AÔB ou α.

Em que:

$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo;
O é o vértice do ângulo.

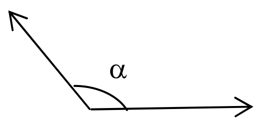
1.2. Ângulo agudo

É aquele cuja medida é menor que a de um ângulo reto.

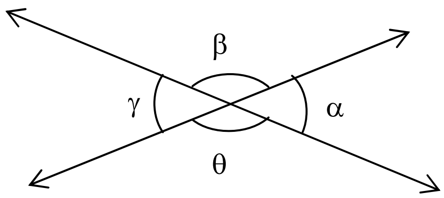


1.3. Ângulo obtuso

É aquele cuja medida é maior que a de um ângulo reto e menor que a de um raso.



1.4. Ângulos opostos pelo vértice

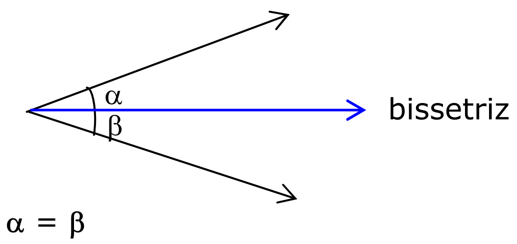


α e γ são opostos pelo vértice.
θ e β são opostos pelo vértice.

→ Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais, ou seja, são congruentes.

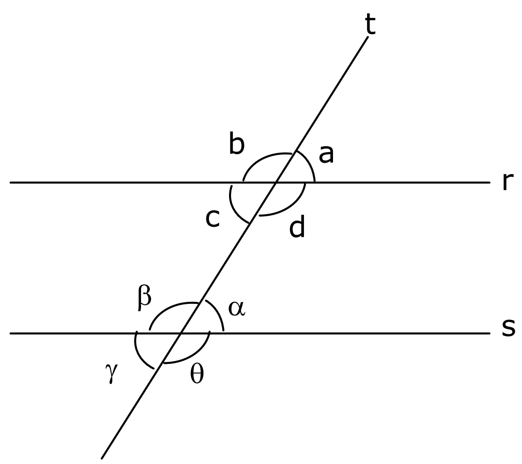
1.5. Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é uma semi-reta de origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes.



1.6. Ângulos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal

Duas retas paralelas r e s, interceptadas por uma transversal, determinam oito ângulos, assim denominados:



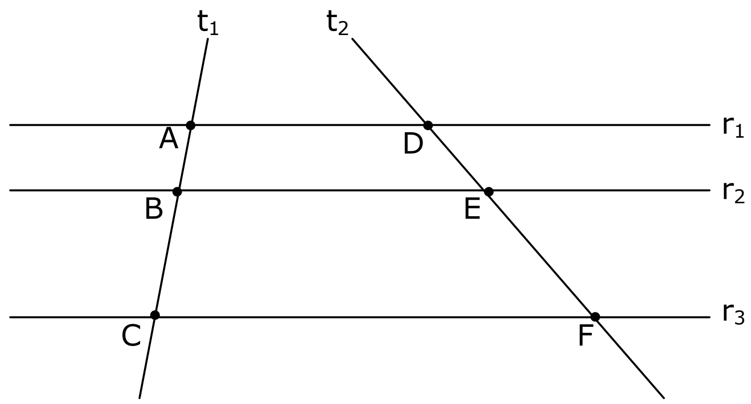
- ângulos correspondentes: *a* e α, *b* e β, *c* e γ, *d* e θ;
- ângulos alternos internos: *c* e α, *d* e β;
- ângulos alternos externos: *a* e γ, *b* e θ;
- ângulos colaterais internos: *c* e β, *d* e α;
- ângulos colaterais externos: *a* e θ, *b* e γ;

Propriedades:

→ Ângulos alternos internos são congruentes.
→ Ângulos alternos externos são congruentes.
→ Ângulos correspondentes são congruentes.
→ Ângulos colaterais internos são suplementares.
→ Ângulos colaterais externos são suplementares.

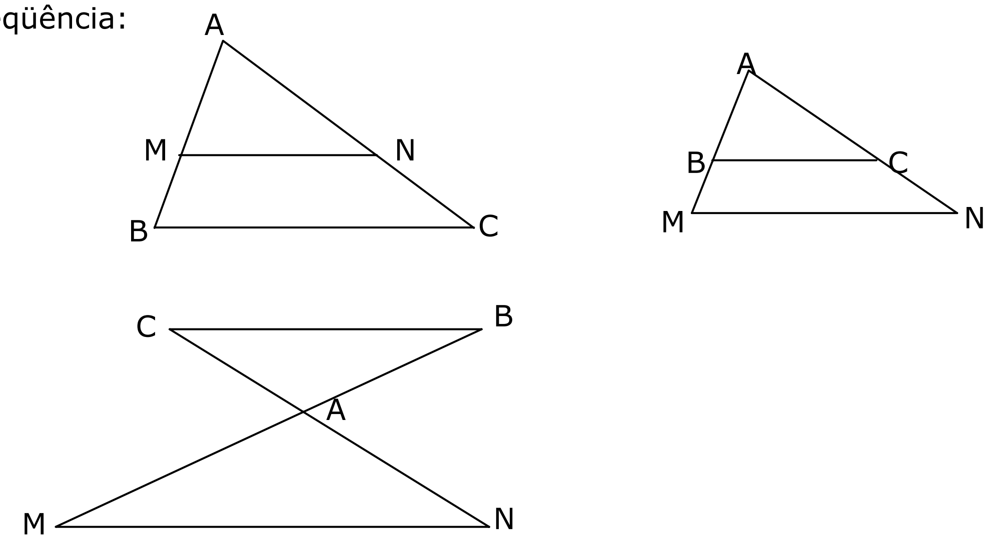
2. TEOREMA DE TALES

Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos que são proporcionais.



Posto isso, teremos: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

→ Conseqüência:

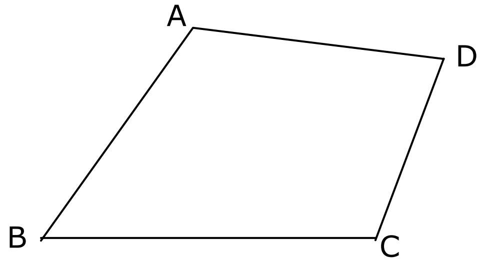


Considerando que MN é paralelo a BC, então temos: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

3. POLÍGONOS

3.1. Nomenclatura

Seja o polígono da figura:



Em que:

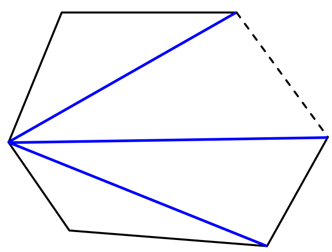
A, B, C e D são os vértices do polígono.
AB, BC, CD e DA são os lados do polígono.

Alguns tipos de polígonos convexos:

triângulo – 3 lados
quadrilátero – 4 lados
pentágono – 5 lados
hexágono – 6 lados
decágono – 10 lados
icoságono – 20 lados

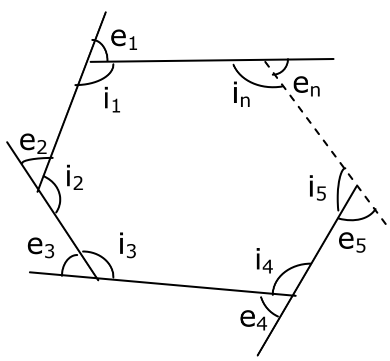
3.2. Número de diagonais de um polígono

O número de diagonais ***d*** de um polígono de n lados é dado por:



$$\boldsymbol{d} = \frac{n(n-3)}{2}$$

3.3. Soma das Medidas dos ângulos Internos e Externos



→ Soma dos ângulos internos de um polígono: $\mathbf{S_i = i_1+i_2+...+i_n = (n\text{-}2).180^o}$

→ Soma dos ângulos externos de um polígono: $\mathbf{S_e = e_1+e_2+...+e_n = 360^o}$

Observação:

→ Se o polígono for regular, ele tem todos os lados e os ângulos congruentes, logo:

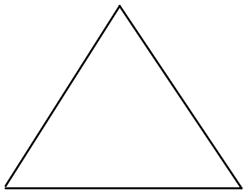
ângulo interno de um polígono de n lados: $\frac{S_i}{n}$

ângulo externo de um polígono de n lados: $\frac{360^o}{2}$

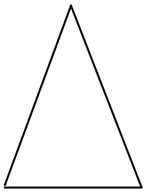
4. TRIÂNGULOS

4.1. Classificação:

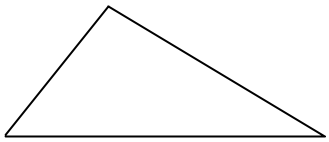
→ Eqüilátero: tem os três lados iguais e os três ângulos iguais (60º).



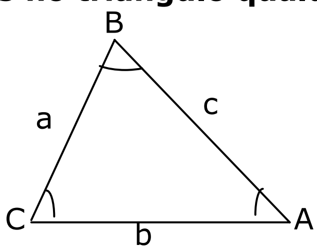
→ Isóceles: tem dois lados iguais e dois ângulos iguais.



→ Escaleno: os três lados são diferentes e também os três ângulos.



4.2. Relações no triângulo qualquer:



1) Qualquer lado é menor que a soma dos outros dois:

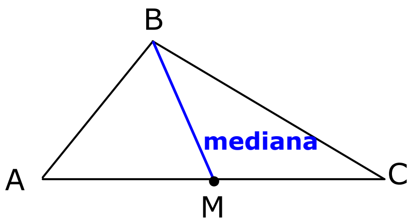
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

2) A soma dos ângulos internos é 180°:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

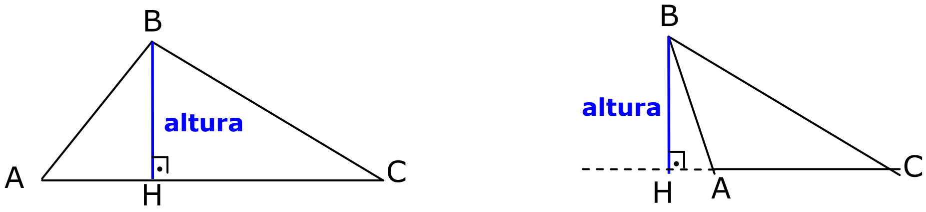
4.3. Mediana

È o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



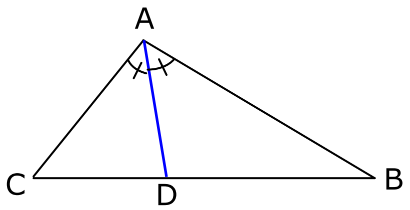
4.4. Altura

É o segmento que parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto.



4.5. Bissetriz

A bissetriz do ângulo Â divide este ângulo em duas partes iguais e intercepta o lado oposto no ponto D. O segmento AD denomina-se **bissetriz interna** relativa ao vértice A.



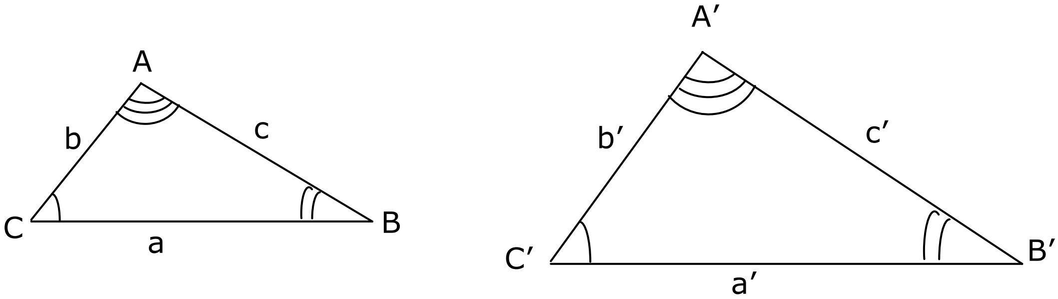
→ **Teorema da bissetriz interna**: a bissetriz do ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto dois segmentos proporcionais aos outros dois lados.

Da figura acima, temos: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

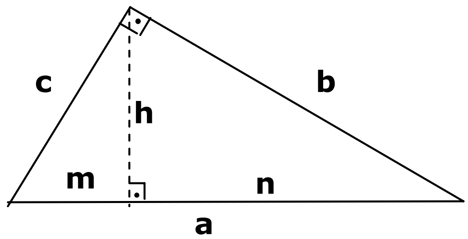
4.6. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos ABC e A'B'C' são dito semelhantes, se:

- os ângulos correspondentes forem congruentes ($\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$).
- os lados correspondentes forem proporcionais ($\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$).



4.7. Relações Métricas no Triângulo Retângulo



a – hipotenusa
b e c – catetos
h – altura relativa a hipotenusa
m e n – projeções dos catetos sobre a hipotenusa

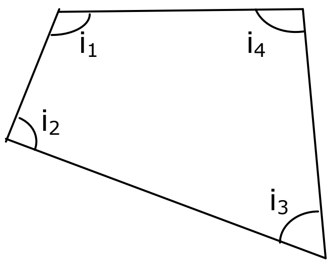
→ Relações métricas:
1) **$bc = ah$** 2) **$c^2 = a.m$** 3) **$b^2 = a.n$** 4) **$h^2 = m.n$**

→ Teorema de Pitágoras: **$a^2 = b^2 + c^2$**

5. QUADRILÁTEROS

→ Quadrilátero é o polígono de quatro lados.

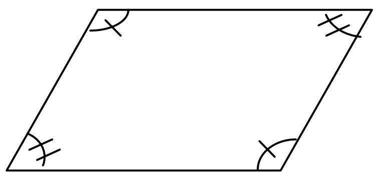
→ A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é: 360º.



$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 360º$

5.1. Classificação

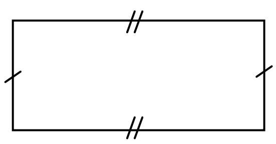
→ **Paralelogramo**
É o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.



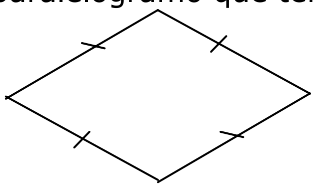
Os ângulos opostos são congruentes.

Paralelogramos Notáveis

→ Retângulo: é o paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes e de medida igual a 90º.



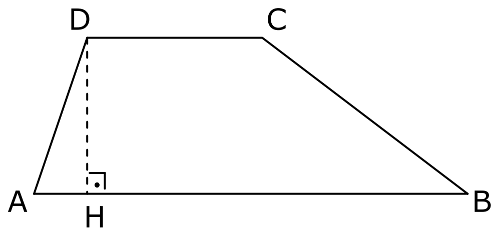
→ Losango: é o paralelogramo que tem os quatro lados iguais.



→ Quadrado: é o paralelogramo que tem os quatro lados e os quatro ângulos iguais entre si.

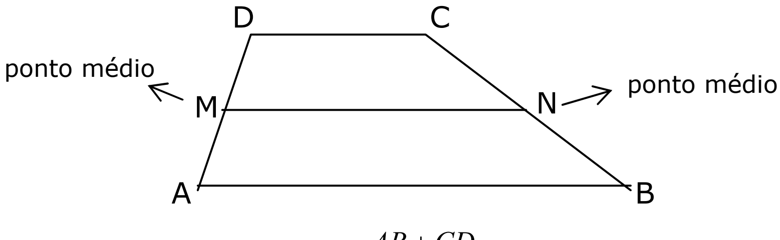
→ **Trapézio**

É o quadrilátero em que apenas dois lados são paralelos entre si.



AB é paralela a CD.
AB é a base maior.
CD é a base menor.
DH é a altura.

→ Propriedade:

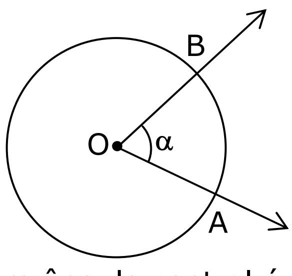


$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

6. Ângulos na Circunferência

6.1. Ângulo Central

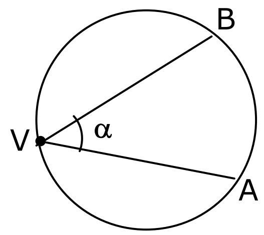
É todo ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência.



$\alpha = \overset{\frown}{AB}$

A medida de um ângulo central é igual à medida do arco que ele enxerga.

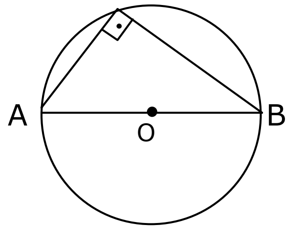
6.2. Ângulo inscrito



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

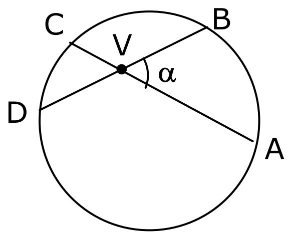
A medida de um ângulo inscrito é igual à medida do arco que ele enxerga.

→ Se $\overset{\frown}{AB}$ corresponde à metade da circunferência (180º), então o ângulo α é reto.



O triângulo inscrito é retângulo.

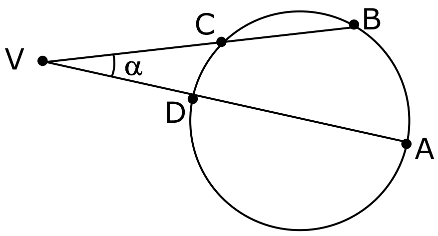
6.3. Ângulo de Vértice Interno



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

A medida de um ângulo de vértice interno à circunferência é igual a semi-soma das medidas dos arcos determinados pelos seus lados.

6.4. Ângulo de Vértice Externo

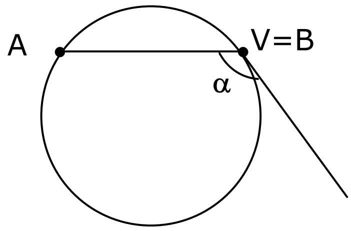


$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

A medida de um ângulo de vértice externo à circunferência é igual a semi-diferença das medidas dos arcos determinados pelos seus lados.

6.5. Ângulo de Segmento

É todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência, sendo um de seus lados secante e o outro, tangente à circunferência.

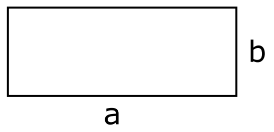


$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

A medida de um ângulo de segmento é igual a metade do arco por ele determinado.

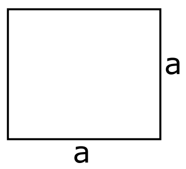
7. ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

Retângulo:



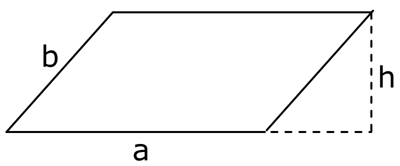
área = a . b

Quadrado:



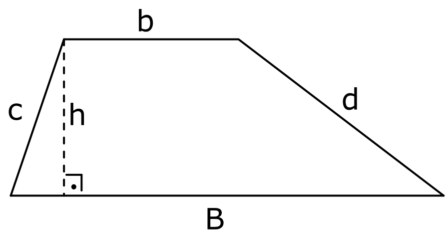
área = a^2

Paralelogramo:



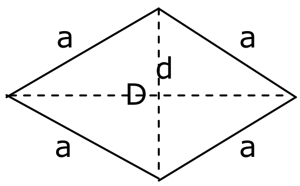
área = base x altura = a x h

Trapézio:



$$\text{área} = \frac{(B + b).h}{2}$$

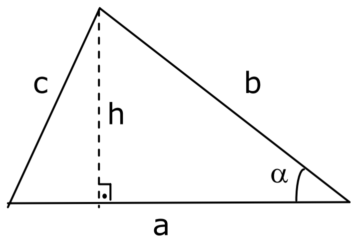
Losango:



$$\text{área} = \frac{D\ .\ d}{2}$$

d = diagonal menor
D = diagonal maior

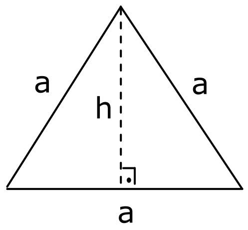
Triângulo:



área = $\dfrac{\text{base x altura}}{2} = \dfrac{\text{a x h}}{2}$ ou

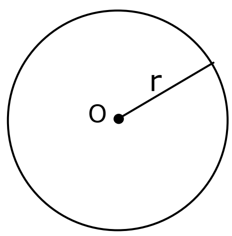
área = $\dfrac{a.b.sen\alpha}{2}$

Triângulo Eqüilátero:



h = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e área = $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

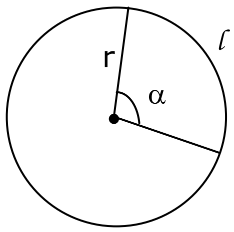
Área do Círculo



área = πr^2

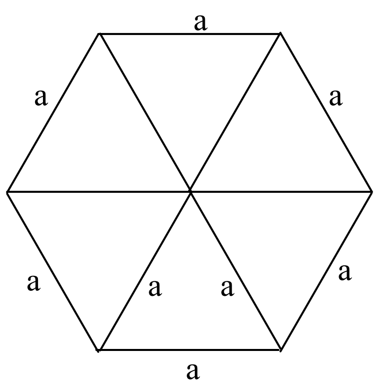
Comprimento de uma circunferência:
C = $\mathbf{2\pi r}$

Setor Circular:



área = $\dfrac{\alpha\pi \mathbf{r^2}}{360°}$

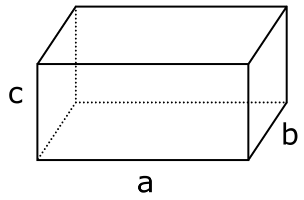
Hexágono Regular: no seu interior há seis triângulos equiláteros



área = $6 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

8. VOLUME DOS SÓLIDOS

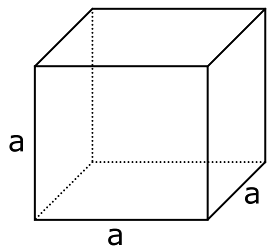
Paralelepípedo retângulo



Volume = área da base x altura = a . b . c

Área total = 2(ab +ac + bc)

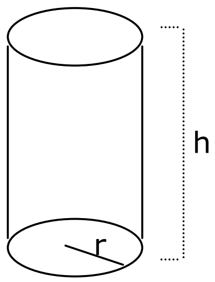
Cubo



Volume = área da base x altura = $a^2 . a = a^3$

Área total = área da base x altura = $6a^2$

Cilindro

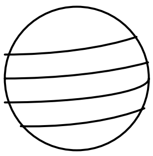


Área lateral = $2\pi r . h$

Área total = área lateral + área das bases = $2\pi rh + 2\pi r^2$

Volume = área da base x altura = $\pi r^2 . h$

Esfera

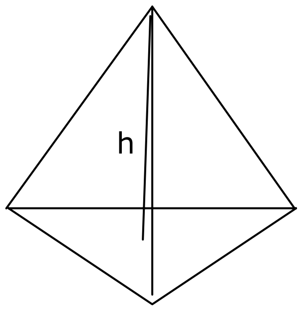


R = raio da esfera

Área total = $4\pi R^2$

Volume = $\frac{4\pi R^3}{3}$

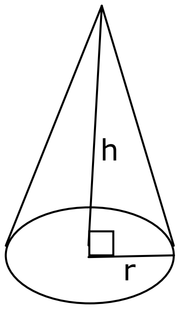
Pirâmide (tetraedro regular: as faces são triângulos equiláteros)



Volume = $\frac{\text{área da base x altura}}{3}$

Volume = $\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times h}{3}$

Cone



$$\text{Volume} = \frac{\text{área da base x altura}}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

Partiremos direto para o dever de casa, na próxima aula traremos todas as questões resolvidas.

DEVER DE CASA DE GEOMETRIA BÁSICA

01. (AFTN 1998/ESAF) Em um triângulo retângulo, um dos catetos forma com a hipotenusa um ângulo de 45º. Sendo a área do triângulo igual a 8 cm^2, então a soma das medidas dos catetos é igual a:

a) 8 cm^2
b) 16 cm
c) 4 cm
d) 16 cm^2
e) 8 cm

02. (Esp. em Pol. Públicas e Gestão Governamental MPOG/2000 ESAF) Os catetos de um triângulo retângulo medem, respectivamente, A+X e A+Y, onde A, X e Y são números reais. Sabendo que o ângulo oposto ao cateto que mede A+X é igual a 45º, segue-se que:

a) Y = -2 X
b) $Y = (3^{1/2})/2\ X$
c) $Y = 3^{1/2}\ X$
d) Y = X
e) Y = 2 X

03. (AFC-STN-2000 ESAF) Os catetos de um triângulo retângulo medem, respectivamente, x e (y-2). Sabendo que a tangente trigonométrica do ângulo oposto ao cateto que mede x é igual a 1, então o perímetro do triângulo é igual a

a) 2y (x + 1)
b) $y\,(2 + 2\sqrt{2}\,)$
c) $x\,(2 + \sqrt{2}\,)$
d) 2 (x + y)
e) $x^2 + y^2$

04. (AFTN 1998/ESAF) Um trapézio ABCD possui base maior igual a 20 cm, base menor igual a 8 cm e altura igual a 15 cm. Assim, a altura, em cm, do triângulo limitado pela base menor e o prolongamento dos lados não paralelos do trapézio é igual a:

a) 10
b) 5
c) 7
d) 17
e) 12

05. (Esp. em Pol. Públicas e Gestão Governamental MPOG/2000 ESAF) Em um triângulo eqüilátero de lado igual a 12 cm, traça-se um segmento $\overline{XY}$ paralelo ao lado $\overline{BC}$ de modo que o triângulo fique decomposto em um trapézio e em um novo triângulo. Sabendo-se que o perímetro do trapézio é igual ao perímetro do novo triângulo, então o comprimento do segmento de reta $\overline{XY}$, em centímetros, vale

a) 5 c) 9 e) 12
b) 6 d) 10

06. (TFC 1996 ESAF) Os pontos X, Y e Z estão todos no mesmo plano. A distância, em linha reta, do ponto X ao ponto Y é de 30 cm, e do ponto X ao ponto Z é de 22 cm. Se d é a distância em centímetros, também em linha reta, do ponto Y ao ponto Z, então o conjunto dos possíveis valores para d é dado por:

a) $8 \le d \le 30$ *d)* $22 \le d \le 52$
b) $8 \le d \le 52$ *e)* $30 \le d \le 52$
c) $22 \le d \le 30$

07. (TCU 2002 ESAF) As medidas dos ângulos do triângulo AYG são tais que Â < Y < 90° e G > 90°. As bissetrizes externas dos ângulos Â e G cortam os prolongamentos dos lados opostos YG e AY nos pontos P e Q, respectivamente. Sabendo que, AG = GQ = AP, então a soma dos ângulos Y e G é igual a:

a) 48° d) 148°
b) 64° e) 168°
c) 144°

08. (Oficial de Chancelaria MRE 2002 ESAF) O ângulo A de um triângulo qualquer ABC mede 76°. Assim, o menor ângulo formado pelas bissetrizes externas relativas aos vértices B e C deste triângulo vale:

a) 50° d) 64°
b) 52° e) 128°
c) 56°

09. (Assistente de Chancelaria MRE 2002) Num triângulo ABC, o ângulo interno de vértice A mede 60°. O maior ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos de vértices B e C mede:

a) 45° c) 90° e) 150°
b) 60° d) 120°

10. (Especialista em Pol. Públicas e Gestão Governamental MPOG 2002 ESAF) Se o raio de uma circunferência tiver um acréscimo de 50%, então o acréscimo percentual em seu comprimento será igual a:

a) 25% d) 80%
b) 50% e) 85%
c) 75%

11. (TFC/SFC 2001 ESAF) As rodas de um automóvel têm 40 cm de raio. Sabendo-se que cada roda deu 20.000 voltas, então a distância percorrida pelo automóvel, em quilômetros(Km), foi de:

a) 16 Km d) $1,6 \cdot 10^3\pi$ Km
b) $16\ \pi$ Km e) $1,6 \cdot 10^3\pi^2$ Km
c) $16\ \pi^2$ Km

12. (AFC 2002 ESAF) A circunferência é uma figura constituída de infinitos pontos, que tem a seguinte propriedade: a distância de qualquer ponto P(x,y), da circunferência até o seu centro C(a,b) é sempre igual ao seu raio R. A forma geral da circunferência é dada por: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Assim, a equação da circunferência de centro na origem dos eixos e que passa pelo ponto (3,4) é:

a) $x^2 + y^2 = 4$
b) $x^2 + y^2 = 9$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 + y^2 = 25$
e) $x^2 + y^2 = 49$

13. (AFC 2005 ESAF) Um feixe de 4 retas paralelas determina sobre uma reta transversal, A, segmentos que medem 2 cm, 10 cm e 18 cm, respectivamente. Esse mesmo feixe de retas paralelas determina sobre uma reta transversal, B, outros três segmentos. Sabe-se que o segmento da transversal B, compreendido entre a primeira e a quarta paralela, mede 90 cm. Desse modo, as medidas, em centímetros, dos segmentos sobre a transversal B são iguais a:

a) 6, 30 e 54
b) 6, 34 e 50
c) 10, 30 e 50
d) 14, 26 e 50
e) 14, 20 e 56

14. (Analista de Recursos Financeiros SERPRO 2001 ESAF) Um triângulo tem lados que medem, respectivamente, 6m, 8m e 10m. Um segundo triângulo, que é um triângulo semelhante ao primeiro, tem perímetro igual a 12m. A área do segundo triângulo será igual a:

a) 6 m^2
b) 12 m^2
c) 24 m^2
d) 48 m^2
e) 60 m^2

15. (AFC 2005 ESAF) Em um triângulo ABC qualquer, um dos lados mede $\sqrt{2}$ cm e um outro mede 2 cm. Se o ângulo formado por esses dois lados mede 45°, então a área do triângulo é igual a

a) $3^{-1/3}$
b) $2^{1/2}$
c) $2^{-1/2}$
d) $3^{\sqrt{2}}$
e) 1

16. (Oficial de Chancelaria MRE 2002 ESAF) Um trapézio ABCD, com altura igual a h, possui bases AB = a e CD = b, com a > b. As diagonais deste trapézio determinam quatro triângulos. A diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases AB e CD respectivamente e por vértices opostos a interseção das diagonais do trapézio é igual a:

a) $\frac{(a+b)}{2}$
b) $\frac{(a+b)h}{2}$
c) $\frac{(a-b)h}{2}$
d) $\frac{(a-b)}{2}$
e) $\frac{(b-a)h}{2}$

17. (AFC-SFC 2001 ESAF) Um hexágono é regular quando, unindo-se seu centro a cada um de seus vértices, obtém-se seis triângulos equiláteros. Desse modo, se o lado de um dos triângulos assim obtidos é igual a $\sqrt{3/2}$ m, então a área, em metros, do hexágono é igual a:

a) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

18. (TCE-RN 2000/ESAF) A reta R_1, que possui coeficiente linear igual a 8 e que é perpendicular à reta R_2= -1/3 x + 8, forma com os eixos coordenados e com a reta x = 2 uma figura cuja área, em metros quadrados, é igual a:

a) 16 d) 48
b) 18 e) 50
c) 22

19. (TTN 1998 ESAF) A área de um círculo localizado no segundo quadrante e cuja circunferência tangencia os eixos coordenados nos pontos (0,4) e (- 4,0) é dada por

a) 16 π b) 4 π c) 8 π d) 2 π e) 32 π

20. (AFC 2002 ESAF) Um dos lados de um retângulo é 7 cm maior do que o outro lado. Se a diagonal deste retângulo mede 13 cm, então o volume de um prisma regular, de 5 cm de altura, e que tem como base este retângulo, é igual a:

a) 50 cm^3 c) 150 cm^3 e) 300 cm^3
b) 65 cm^3 d) 200 cm^3

21. (Fiscal do Trabalho 2003 ESAF) Fernando, João Guilherme e Bruno encontram-se perdidos, uns dos outros, no meio da floresta. Cada um está parado em um ponto, gritando o mais alto possível, para que os outros possam localizá-lo. Há um único ponto em que é possível ouvir simultaneamente Fernando e Bruno, um outro único ponto (diferente daquele) em que é possível ouvir simultaneamente Bruno e João Guilherme, e há ainda um outro único ponto (diferente dos outros dois) em que é possível ouvir simultaneamente João Guilherme e Fernando. Bruno encontra-se, em linha reta, a 650 metros do ponto onde se encontra Fernando. Fernando, por sua vez, está a 350 metros, também em linha reta, do ponto onde está João Guilherme. Fernando grita o suficiente para que seja possível ouvi-lo em qualquer ponto até uma distância de 250 metros de onde ele se encontra. Portanto, a distância em linha reta, em metros, entre os pontos em que se encontram Bruno e João Guilherme é:

a) 650 b) 600 c) 500 d) 700 e) 720

22. (Fiscal do Trabalho 2003 ESAF) Augusto, Vinicius e Romeu estão no mesmo vértice de um polígono regular. Num dado momento, os três começam a caminhar na borda do polígono. Todos os três caminham em velocidades constantes, sendo que a velocidade de Augusto é o dobro da de Vinicius e o quádruplo da de Romeu. Augusto desloca-se em sentido oposto ao de Vinicius e ao de Romeu. Após um certo tempo, Augusto e Vinicius encontram-se num determinado vértice. Logo a seguir, exatamente dois vértices depois, encontram-se Augusto e Romeu. O número de arestas do polígono é:

a) 10 b) 15 c) 12 d) 14 e) 11

23. (SERPRO 1996 ESAF) O ponto de intersecção das retas 2x + y – 1 = 0 e x – y + 16 = 0 têm coordenadas iguais a:

a) (-11,-5) d) (11,5)
b) (-11,3) e) (-5,11)
c) (-5,-1)

24. (AFC-SFC 2001 ESAF) Sabe-se que as retas de equações $r_1 = \alpha x$ e $r_2 = -2x+\beta$ interceptam-se em um ponto P(x<0; y<0). Logo,

a) $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ d) $\alpha < -1$ e $\beta < 0$
b) $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ e) $\alpha > -1$ e $\beta > 0$
c) $\alpha < 0$ e $\beta < 0$